AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN IN HAMBURG

Michael Eckert

Strömungsmechanik zwischen Mathematik und Ingenieurwissenschaften

Felix Kleins Hydrodynamikseminar 1907/08

Hamburg University Press

Michael Eckert
Strömungsmechanik zwischen Mathematik und Ingenieurwissenschaften

Michael Eckert

Strömungsmechanik zwischen Mathematik und Ingenieurwissenschaften

Felix Kleins Hydrodynamikseminar 1907/08

Hamburg University Press
Verlag der Staats- und Universitätsbibliothek Hamburg
Carl von Ossietzky

BIBLIOGRAFISCHE INFORMATION DER DEUTSCHEN NATIONALBIBLIOTHEK
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über https://portal.dnb.de abrufbar.

ONLINE-AUSGABE
Die Online-Ausgabe dieses Werkes ist eine Open-Access-Publikation und ist auf den Verlagswebseiten frei verfügbar. Die Deutsche Nationalbibliothek hat die Online-Ausgabe archiviert. Diese ist dauerhaft auf dem Archivserver der Deutschen Nationalbibliothek (https://portal.dnb.de/) verfügbar.

DOI https://doi.org/10.15460/HUP.186

PRINTAUSGABE
ISBN 978-3-943423-61-7

DRUCK UND BINDUNG: Books on Demand – Norderstedt
HERAUSGEBER: Akademie der Wissenschaften in Hamburg
UMSCHLAGGESTALTUNG UND GRAPHIK: Christine Klein, Hamburg
REDAKTION UND SATZ: Florian Henri Besthorn, Akademie der Wissenschaften in Hamburg

VERLAG: Hamburg University Press, Verlag der Staats- und Universitätsbibliothek Hamburg Carl von Ossietzky, Hamburg (Deutschland), 2019
http://hup.sub.uni-hamburg.de

Inhaltsverzeichnis

Grußwort

Der vorliegende Band entstand aus einem von der Akademie der Wissenschaften in Hamburg unterstützen Forschungsprojekt, das sich der Untersuchung und Grundlagenentwicklung der modernen Hydrodynamik widmet. Anfang des 20. Jahrhunderts gelang es, die theoretischen Erkenntnisse der Hydrodynamik in die Strömungsmechanik einzubringen. Die Hydrodynamik wurde seit dem frühen Altertum auf sehr hohem praktischen Niveau betrieben. Die mathematisch-physikalische Umsetzung wurde aber lange Zeit vernachlässigt. Erst Ludwig Prandtls „Grenzschichttheorie“ von 1904 half, die jahrhundertelange Kluft zwischen einer anwendungsnahen Hydraulik und der wissenschaftlichen Hydrodynamik zu überbrücken. Bewusst als eine Verbindung von Theorie und Praxis wurde von dem Mathematiker Felix Klein darauf ein Hydrodynamikseminar im Wintersemester 1907/08 an der Göttinger Universität abgehalten, bei dem auch sein, kurz zuvor nach Göttingen berufener, Professorenkollege Prandtl mitwirkte.

Die Ergebnisse der sechzehn Sitzungen dieses Hydrodynamischen Seminars wurden zusammenfassend in einem Protokollbuch festgehalten, dass hier nun erstmals in edierter Form zugänglich ist. Nach zahlreichen Vorstudien beschäftigte sich der Herausgeber vom Mai bis Dezember 2017 intensiv mit dieser Quelle, die sich im mathematischen Institut der Universität Göttingen befindet. Herr Dr. Michael Eckert wurde hierfür von der Akademie der Wissenschaften in Hamburg maßgeblich finanziell unterstützt, mit dem Ziel, seine Ergebnisse einer breiten Leserschaft durch eine Buch- und Open-Access-Publikation zugänglich zu machen.

Er studierte die Hauptquelle, das „Protokollbuch Nr. 27 der Kleinschen Seminare“, transkribierte dessen Beiträge in einer kritischen Edition und fügte eine allgemeinverständliche Einführung hinzu, in welcher die Bedeutung der Lehrveranstaltung historisch verortet wird. Im ersten Teil des vorliegenden Buches werden die, im zweiten abgedruckten, Beiträge des Protokollbuches zusammenfassend kommentiert und die Seminarteil-

nehmer, die die Vortragsausarbeitungen verfassten, kurz biografisch vorgestellt.

Zur Veranschaulichung wurden die im Protokollbuch festgehaltenen Skizzen und Abbildungen als Bildzitate dem Editionstext an den entsprechenden Stellen beigegeben. Die durch Marginalien hinzugefügte Paginierung hilft, die Edition mit den nun ebenfalls online verfügbaren hochaufgelösten Scans der Originalseiten zu vergleichen. Da die Handschriften der verschiedenen Seminarteilnehmer, vor allem innerhalb der wiedergegebenen Formeln, teils nicht leicht zu entziffern sind, bildet die vorliegende Transkription nun einen einfachen Zugang zum aufschlussreichen Material. Eine umfangreiche Bibliografie rundet die erste Edition dieser wichtigen Quelle der Hydrodynamik ab.

Michael Eckert hat sich bereit erklärt, sowohl als Herausgeber als auch als Autor diese kritische Edition einer Strömungsmechanik zwischen Mathematik und Ingenieurwissenschaften selbstverantwortlich zu realisieren. Für sein großes Engagement und die sorgfältige Manuskripterstellung danke ich ihm sehr herzlich. Weiterhin freut es mich, dass wir das Buchprojekt in enger Kooperation mit dem Verlag der Staats- und Universitätsbibliothek Hamburg Carl von Ossietzky „Hamburg University Press“ veröffentlichen konnten, der die Inhalte in wissenschaftsadäquater Form auch elektronisch zur Verfügung stellt. Bei diesem Band standen uns Tobias Buck vom Verlag und die Grafikerin Christine Klein, die das Umschlags-Layout sowie die Bildbearbeitung übernommen hat, in bewährter Weise hilfreich und unterstützend zur Seite. Schließlich geht mein Dank auch an Florian Henri Besthorn für die redaktionelle Betreuung des Bandes und Einrichtung des Manuskriptes.

Hamburg, im November 2018
Prof. Dr.-Ing. habil. Prof. E.h. Edwin J. Kreuzer

Vorwort

Die Hydrodynamik zählt zu den ältesten praxisbezogenen Wissenschaften der Menschheitsgeschichte. Empirisches Wissen über Wasserströmungen in Kanälen und Rohrleitungen gehörte zu den wichtigsten Voraussetzungen früher Kulturen. Demgegenüber blieb die mathematische Ausgestaltung dieser Wissenschaft weit hinter ihren praktisch-technischen Anwendungen zurück. Selbst für Newton war die Hydrodynamik noch Gegenstand größter – weitgehend erfolgloser – Anstrengungen. Erst im 18. Jahrhundert setzten Johann und Daniel Bernoulli (Vater und Sohn) die ersten Marksteine der Hydrodynamik als exakter Wissenschaft. Sie gaben ihren Werken die Titel *Hydraulica* bzw. *Hydrodynamica*. Das Wort ‚Hydraulik' verbindet die Worte ‚Wasser' und ‚Rohr', bedeutet also ursprünglich die Lehre von der Wasserströmung in Rohrleitungen; ‚Hydrodynamik' kombiniert die Worte ‚Wasser' und ‚Kraft', ist also nicht nur auf die Rohrströmung beschränkt. Dennoch verwendeten Johann und Daniel Bernoulli diese Begriffe fast synonym; sie wollten damit keine Unterscheidung von technischem Ingenieurwissen gegenüber einem mehr mathematisch-physikalischen Grundlagenwissen betonen. Die beiden Bernoullis waren erbitterte Rivalen, sie benutzten ihre unterschiedlichen Buchtitel eher, um sich voneinander abzugrenzen.

Im 19. Jahrhundert differenzierte sich das theoretische und praktische Wissen im Umgang mit Wasserströmungen dann so weit auseinander, dass man die Hydrodynamik als physikalisches Grundlagenfach und die Hydraulik als Ingenieurdisziplin auffasste. Um 1900 wurde die Kluft zwischen beiden Richtungen fast sprichwörtlich für das Auseinanderklaffen von Theorie und Praxis. Mit der Verwissenschaftlichung des Ingenieurwesens im 20. Jahrhundert kam es zwar hier und da zu einem Ausgleich alter Gegensätze; dennoch bestehen bis heute deutliche Unterschiede zwischen einer ingenieurwissenschaftlichen und einer eher mathematisch-physikalisch orientierten Strömungsmechanik, wie diese Forschungsrichtung heute meist bezeichnet wird.

Aus einem fachwissenschaftlichlichen Blickwinkel lässt sich die Wende von der alten Hydrodynamik bzw. Hydraulik zur modernen Strömungsmechanik auf das Jahr 1904 datieren, als Ludwig Prandtl mit der Grenzschichttheorie ein Konzept präsentierte, das die allgemein nicht lösbare reibungsbehaftete Strömung der Hydraulik im wahrsten Sinn des Wortes anschlussfähig an die mathematisch eher zugängliche ideale Strömung der Hydrodynamik machte. Für Fluide mit kleiner Reibung (wie Wasser und Luft) ließ sich danach der Reibungseinfluss auf die unmittelbarer Nähe eines umströmten Körpers beschränken, wo man die hydrodynamischen Gleichungen durch Näherungen ersetzen konnte. In einiger Entfernung davon erschien die Annahme der idealen Strömung gerechtfertigt, sodass dort das Arsenal der Potentialtheorie zum Einsatz kommen konnte.

Das hier betrachtete Hydrodynamikseminar des Wintersemesters 1907/08 [1] fand inmitten dieser Umbruchphase statt. Für seinen Organisator, den Göttinger Mathematiker Felix Klein, war dies nach einer Hydrodynamikvorlesung und einem begleitenden Seminar im Wintersemester 1899/1900 sowie einem weiteren Hydrodynamikseminar im Wintersemester 1903/04 der Abschluss eingehender Beschäftigung mit der Hydrodynamik als einer besonderen Herausforderung für die Mathematik. Das Seminar von 1907/08 sollte noch mehr als seine Vorlesung und die vorangegangenen Seminare der „Verbindung der Theorie mit der Praxis“ gewidmet sein, wie er den Teilnehmern erklärte. Diese Verbindung wurde auch von Kleins Mitorganisatoren Ludwig Prandtl und Carl Runge unterstrichen, die 1904 nach Göttingen berufen worden waren und die neuen Institute für angewandte Mechanik und Mathematik leiteten. (Der Geophysiker Emil Wiechert, der als weiterer Mitorganisator firmierte, trat den Seminarprotokollen zufolge nicht aktiv in Erscheinung.)

Dass es sich bei den Protokollen der Seminarvorträge nicht um ein gedrucktes Werk, sondern um handschriftliche Einträge der Seminarteilnehmer handelt, gibt ihnen den Charakter eines authentischen Werkstattberichts. Die Einträge im Protokollbuch spiegeln den Stand der Wissenschaft so wider, wie er sich einem Studenten jener Jahre darbot. Anders als bei einem Lehrbuch, dessen Darstellung in der Regel auf ein geschlossenes Ganzes abzielt und durch die Vorlieben oder Abneigungen des Autors geprägt ist, zeigen die nicht zur Veröffentlichung bestimmten Protokolle eher

[1] http://www.uni-math.gwdg.de/aufzeichnungen/klein-scans/klein/V27-1907-1909/V27-1907-1909.html.

solche Facetten auf, die einem abgerundeten Bild im Wege stehen. Den Seminarteilnehmern ging es (noch) nicht um die Festigung ihres eigenen wissenschaftlichen Rufes – sie waren außerhalb ihres eigenen Studienumfelds unbekannt und bis auf einige Schüler Prandtls später in ihrer eigenen Forschung auf ganz anderen Gebieten tätig.

Die Edition eines solchen Werkstattberichts bedarf einiger Vorbemerkungen. Im Originalzustand ist das Protokollbuch nur schwer für ein Studium der darin enthaltenen hydrodynamischen Themen zu gebrauchen, da es sich um isolierte Einträge mit nur schwer zu rekonstruierenden Bezügen zu anderweitiger Literatur handelt. Für den zeitgenössischen Benutzer stand diese Literatur mitsamt den einschlägigen Vorlesungsmitschriften im Lesesaal des mathematischen Instituts der Göttinger Universität griffbereit zur Verfügung. Für den modernen Benutzer soll die nachfolgende Edition Abhilfe schaffen. Dies geschieht mit einer ausführlichen historischen Annäherung an die Kleinschen Bestrebungen (Kap. 1) und an die im Seminar behandelten Themen (Kap. 2) sowie einem Fußnotenapparat in der Edition der Protokolle. Über die Seminarteilnehmer finden sich im Kap. 3 kurze biografische Abrisse. Außerdem bereitet die Lektüre der Originalprotokolle selbst für fachlich versierte Experten aufgrund einiger, schwer zu entziffernder Handschriften Probleme. Die Transkription der Handschriften in gedruckten Text schafft hier Abhilfe; doch sie verleiht den spontanen Einträgen in das Protokollbuch nolens volens eine Autorität und Abgeklärtheit, die von den Seminarteilnehmern selbst nicht beabsichtigt war. Sprachliche Mängel (zwei Seminarteilnehmer – Theodore von Kármán und Aladár Visnya – stammten aus Ungarn) sollten deshalb nicht als Unvermögen oder Mangel an gedanklicher Klarheit gedeutet werden. Im Einzelnen geben die editorischen Grundsätze (zu Beginn des II. Teils abgedruckt) Aufschluss darüber, inwieweit die Transkription von den Originaleinträgen abweicht.

Diese Edition wäre ohne die Unterstützung vieler Personen und Institutionen nicht möglich gewesen. Der erste Dank gebührt dem mathematischen Institut der Universität Göttingen, das mit der Bereitstellung der Scans der Protokollbücher eine Basis für die wissenschaftshistorische Untersuchung dieses wertvollen historischen Quellenbestandes geschaffen hat. Ferner danke ich der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek und dem Archiv der Göttinger Universität für die Einsicht in den Nachlass von Felix Klein, die Promotionsunterlagen der Seminarteil-

nehmer und andere wichtige Quellen. Für die Erlaubnis zum Abdruck von Protokolleinträgen bzw. Auskünfte über Nachfahren von Seminarteilnehmern danke ich Elfriede Blasius, Karin Blasius, Regine Blasius, Thomas Frischgesell, Willy Hager, Wilhelm Hiemenz, Paul Rudenberg, Peter Schönhofen, Károly Vig, Marcus Wolff, sowie den Archivaren des California Institute of Technology/Pasadena, und der Northwestern University Libraries/Evanston, wo die Nachlässe von Theodore von Kármán bzw. Ernst Hellinger aufbewahrt werden. (Es gelang nicht in allen Fällen, Nachfahren für die Erteilung der vom Urheberrecht gebotenen Abdruckgenehmigungen zu identifizieren; falls sich solche finden, bitte ich an dieser Stelle nachträglich um Kontaktaufnahme.) Ein weiterer Dank geht an Moritz Firsching (FU Berlin), der sich um die Internet-Darstellung der Seminarprotokolle verdient gemacht hat. Last but not least danke ich der Akademie der Wissenschaften in Hamburg, die auf unbürokratische Weise mit ihrer Förderung diese Edition erst ermöglicht hat.

Michael Eckert, im Dezember 2017

Abkürzungen

AMPG	Archiv der Max-Planck-Gesellschaft, Berlin
DLR	Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt, Göttingen
DMA	Deutsches Museum, Archiv, München
GOAR	Archiv des DLR, Göttingen
GStAPK	Geheimes Staatsarchiv Preußischer Kulturbesitz, Berlin
MAN	Maschinenfabrik Augsburg-Nürnberg
SUB	Staats- und Universitätsbibliothek, Göttingen
UAG	Universitätsarchiv, Göttingen
VDI	Verein Deutscher Ingenieure

I Historische Annäherung

1 Felix Klein und die Hydrodynamik

Das Verhältnis von Theorie und Praxis war für den Mathematiker Felix Klein schon immer eine besondere Herausforderung. „Ich wies darauf hin, dass die Mathematik mit den Anwendungen, insbesondere der Physik, untrennbar zusammengehöre und dass es nützlich sei, wenn auch der Mathematiker von seiner Seite diesem Zusammenhang nachginge“, notierte er sich zum Beispiel am 25. Oktober 1888 zu Beginn einer Vorlesung über „Partielle Differentialgleichungen der Physik“. Dabei sah er die Mathematik aber nicht primär als Werkzeug für Physiker und Ingenieure, sondern als Nutznießer: Der mathematische Blick auf die Nachbargebiete sei „nützlich nicht nur für das Studium dieser Anwendungen, sondern auch für die reine Mathematik selbst, die aus den Anwendungen ihre Kraft zieht. Dieser Gedanke hat sich dann als roter Faden durch die ganze Vorlesung hindurchgezogen.“[1]

Klein thematisierte diese Herausforderung aber nicht nur im Interesse der Mathematik. Seit Mitte der 1890er Jahre ging es ihm auch hochschulpolitisch darum, den angewandten Wissenschaften unter dem Dach der Universitäten mehr Raum zu geben – und dabei richtete sich sein Interesse besonders auf die Hydrodynamik. „Zwei Tendenzen machen sich heutzutage geltend, einmal die Tendenz der *praktischen* Anwendung, andererseits das Streben, die *reine Theorie* möglichst auszubilden.“ So leitete er am 24. Oktober 1899 eine Vorlesung über Hydrodynamik ein, die er als „eine Art Fortsetzung“ seiner Mechanikvorlesungen früherer Semester verstand. Sie richtete sich an Studierende ab dem vierten Semester, bei denen Klein Kenntnisse über analytische Geometrie, Differential- und Integralrechnung voraussetzen konnte. Als Ergänzung dazu veranstaltete er ein

[1] Kleins Notizen zu „Partielle Differentialgleichungen I, Winter 88–89“. SUB, Handschriften, Cod. Ms. F. Klein 15H.

Seminar über „Schiffsbewegung", das „in lebhaftem Kontakt mit der Praxis stehen" sollte.[2]

Die Kluft zwischen Theorie und Praxis war in der Hydrodynamik so ausgeprägt wie in kaum einer anderen Wissenschaft.[3] In einem 1900 veröffentlichten *Lehrbuch der Hydrodynamik* wurde dem Leser schon im Vorwort mitgeteilt, dass die Theorie für praktische Anwendungen unzureichend sei und „die Technik sich für ihre Zwecke eine besondere Behandlungsweise hydrodynamischer Aufgaben, die meistens den Namen Hydraulik führt, zurechtgemacht hat." Da diese aber nicht auf einer soliden theoretischen Grundlage aufbaue, seien ihre Ergebnisse nur empirische Formeln von begrenzter Gültigkeit.[4] Arnold Sommerfeld, der in den 1890er Jahren als Kleins Assistent seine Karriere in der Mathematik begonnen hatte und 1900 als Professor der Mechanik an der Technischen Hochschule Aachen mit den Anwendungen in der Ingenieurwissenschaft konfrontiert wurde, illustrierte den Gegensatz von Hydrodynamik und Hydraulik am Beispiel der Wasserströmung in einem Rohr. Den Anlass dafür bot die alljährliche Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte, die 1900 in Aachen stattfand. Sommerfeld wollte mit seinem Vortrag über „Neuere Untersuchungen zur Hydraulik" kundtun, dass er sich den Herausforderungen stellte, die ihn als Mechanikprofessur an einer technischen Hochschule erwarteten:[5]

> Der Vortragende weist zunächst auf den Gegensatz hin, der zwischen der Theorie der Flüssigkeitsbewegungen in mathematisch-physikalischer Behandlung (der Hydrodynamik) und in technischer Behandlung (der Hydraulik) besteht. Dieser Gegensatz zeigt sich besonders bei der Berechnung des Reibungswiderstandes in einer Röhre. Nach der physikalischen Theorie ist der Reibungswiderstand proportional der ersten Potenz der Geschwindigkeit, umgekehrt proportional der zweiten Potenz des Durchmessers, nach der technischen Theorie dagegen proportional der zweiten Potenz der Geschwindigkeit, umgekehrt proportional der ersten des Durchmessers. Die physikalische Theorie bewährt sich glänzend bei Kapillarröhren; berechnet man aber

[2] F. Klein: Vorlesungen über die Mechanik der deformierbaren Körper. Teil I: Hydrodynamik. Wintersemester 1899/1900. 3-stündig. Handschriftliche Ausarbeitung von Karl Wieghardt (UAG). Im folgenden zitiert als „Wieghardt-Ausarbeitung". Das „Seminar über die Schiffsbewegung" ist protokolliert im Band 15 der Seminarprotokolle; die Scans der Protokolle sind online zugänglich via http://www.uni-math.gwdg.de/aufzeichnungen/klein-scans/klein/V15-1899-1900/V15-1899-1900.html.

[3] Zur Geschichte der Hydrodynamik und Hydraulik siehe Rouse u. Ince, 1957; Mikhailov, 1994; Darrigol, 2005; Eckert, 2006.

[4] Wien, 1900, S. III.

[5] Sommerfeld, 1900, S. 56.

> daraus die Reibungsverluste bei einer Wasserleitungsröhre, so findet man unter Umständen einen 100mal zu kleinen Wert.

Mit anderen Worten: Die physikalische Theorie der Hydrodynamik konnte nur die laminare Strömung in dünnen Kapillarröhren berechnen; bei der in dicken Wasserleitungen vorherrschenden turbulenten Strömung, mit der die Hydraulikingenieure konfrontiert waren, versagte die Theorie. „Die Tatsache, dass turbulente Bewegungen eintreten, bildet die Brücke zwischen der Hydrodynamik und der Hydraulik." So brachte Klein in seiner Hydrodynamikvorlesung um dieselbe Zeit die Kluft zwischen Theorie und Praxis auf den Punkt. „Französische Ingenieure sind es vorzugsweise, die sich der Mühe unterzogen haben, genaue Beobachtungen über turbulente Bewegungen anzustellen."[6]

Kleins Blick nach Frankreich, wo man seiner Einschätzung nach dem Ingenieurwissen größere Beachtung als in Deutschland schenkte, deutet schon an, dass er damit noch weitergehende Anliegen verfolgte. Seine Vorlesungen und Seminare zur Hydrodynamik können nicht losgelöst von den hochschulpolitischen Zielen und organisatorischen Maßnahmen betrachtet werden, die Göttingen am Beginn des 20. Jahrhunderts zu einer Keimzelle der modernen Strömungsmechanik werden ließen.

1.1 Kleins Bestrebungen

Felix Klein hatte schon früh erkennen lassen, dass er sich nicht nur als Mathematiker und Hochschullehrer, sondern auch als Wissenschaftsorganisator hervortun wollte. Das zeigte sich bereits kurz nach seiner Berufung nach Göttingen, als er Friedrich Althoff, dem umtriebigen Universitätsreferenten im preußischen Kultusministerium, der in diesen Jahren umfassende Reformen für die preußischen Universitäten plante, „eine baldige Vereinigung der Technischen Hochschulen mit den Universitäten" ans Herz legte. Das sei „schon allein im Interesse unserer mathematischen Studien zu wünschen", so motivierte er diese Fusion, liege aber auch „im Interesse unserer Gesamtkultur".[7]

Im Oktober 1888 konkretisierte Klein seine Bestrebungen in einer Denkschrift, die als ersten Schritt auf diesem Weg die Eingliederung der Technischen Hochschule Hannover in die Universität Göttingen empfahl.

---

[6] Vorlesung vom 16. Januar 1900. Wieghardt-Ausarbeitung, S. 327.

[7] Zitiert in Manegold, 1970, S. 101.

Deutschland hinke anderen Ländern, vor allem Frankreich, hinterher, was die wissenschaftliche Durchdringung der Technik anging. Die Eingliederung der Technischen Hochschule in die Universität würde nicht nur die Ingenieurfächer auf ein wissenschaftliches Niveau anheben, sondern auch einer drohenden Isolierung der Universität von dem in der modernen Gesellschaft immer deutlicher hervortretenden technisch-industriellen Umfeld Vorschub leisten. Technische Fächer sollten an der Universität den Rang von eigenen Fakultäten erhalten, und die dort ausgebildeten Studenten sollten wie die anderer Fakultäten den Doktorgrad erwerben können. Schließlich sah er gerade für die Göttinger Universität darin eine Gelegenheit, an die mit der Person von Carl Friedrich Gauß verbundene Tradition anzuknüpfen. Gauß hatte seiner Universität nicht nur als großer Mathematiker Ruhm und Ehre gebracht, sondern sich auch um die Technik verdient gemacht, von der Landesvermessung bis zur Telegrafie. „Verlegen wir die Technische Hochschule Hannover nach Göttingen, so treten wir in das Gaußsche Erbe in viel allgemeinerem Sinne ein, als das seither möglich war.“ [8]

Der Plan wurde nicht verwirklicht. Die technischen Hochschulen pochten auf ihre Eigenständigkeit. Insbesondere fürchtete man auf Seiten der Technikprofessoren, dass den Universitäten die Ausbildung von „Generalstabsoffizieren der Technik“ überantwortet würde und an den technischen Hochschulen nur noch das Fußvolk an Ingenieuren studieren würde. 1895 sah sich Klein bei der Hauptversammlung des Vereins Deutscher Ingenieure (VDI) in Aachen gezwungen, nicht länger auf einer Ingenieursausbildung an Universitäten zu beharren. Sie sollte, auch was „Generalstabsoffiziere der Technik“ anging, den technischen Hochschulen vorbehalten bleiben. Umgekehrt gestanden ihm die Ingenieure zu, dass an der Universität für die Ausbildung von Lehramtsstudenten in den Fächern Mathematik und Physik die Technik nicht ausgeklammert werden musste. Der Kompromiss ging in Anspielung an historische Aachener Vertragsunterzeichnungen als „Aachener Friede“ in die Technikgeschichte ein. [9] Dennoch dauerte es noch mehrere Jahre, bis den technischen Hochschulen durch das Promotionsrecht für Ingenieure auch in dieser Hinsicht die Gleichstellung mit den Universitäten zugestanden wurde. [10]

[8] Zitiert in Manegold, 1970, S. 107.

[9] Manegold, 1970, Kap. III.3.

[10] Manegold, 1970, Kap. IV.

Das Scheitern seiner umfassenden Pläne für die Vereinnahmung der technischen Hochschulen unter dem Dach der Universitäten hielt Klein jedoch nicht davon ab, wenigstens an der Göttinger Universität zu demonstrieren, welche Vorteile eine engere Verbindung von Wissenschaft und Technik für beide Seiten mit sich bringt. 1897 sorgte er am physikalischen Institut seiner Universität für die Einrichtung einer „technischen Abteilung“, die mit einer außerordentlichen Professur, einer Assistenten- und Mechanikerstelle verbunden war. Ein Jahr später gründete er die „Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik“, die mit Unterstützung von Industriellen zunächst der technischen Abteilung am Physikinstitut eine gesicherte finanzielle Basis bescherte, dann aber auch die Einrichtung weiterer Institute für angewandte Wissenschaften ermöglichte. Binnen weniger Jahre bescherte Kleins akademisch-industrielles Netzwerk der Göttinger Universität eine stattliche Anzahl neuer Professuren und Institute anwendungsnaher Fächer, von der Elektrotechnik über die physikalische Chemie bis hin zur Versicherungswissenschaft.[11]

Kleins wissenschaftsorganisatorische Bemühungen erschöpften sich jedoch nicht in der institutionellen Verankerung von angewandten Wissenschaften an der Göttinger Universität. 1894 brachte er das Projekt einer umfassenden Enzyklopädie mathematischer Wissenschaften auf den Weg. Vor dem Hintergrund eines immer aufs Neue ausbrechenden Grundlagenstreits in der Mathematik[12] zwischen den Verfechtern einer „reinen“ Mathematik und den mehr die Anschauung und die Anwendungen betonenden Mathematikern sah Klein in der Enzyklopädie eine Möglichkeit, seinem eigenen Mathematikverständnis und den davon ausgehenden Visionen Ausdruck zu verleihen.[13] Er bestimmte weitgehend die Gliederung des vielbändigen Mammutwerks und sorgte unermüdlich dafür, dass die ihm geeignet erscheinenden Herausgeber und Autoren mit der Abfassung der verschiedenen Kapitel betraut wurden. Von den anwendungsnahen Teilen war ihm die Mechanik so wichtig, dass er deren Herausgabe und Redaktion selbst übernahm. Seinen deutschen Mathematikerkollegen traute er ebensowenig wie den deutschen Ingenieuren zu, dass sie auf diesem Gebiet die nötige Übersicht besaßen:[14]

[11] Manegold, 1970, Kap. III.8.

[12] Mehrtens, 1990.

[13] Rowe, 1989; Tobies, 1994.

[14] Klein an Walther von Dyck, 13. Juni 1896, zitiert in Tobies, 1994, S. 22.

> Unsere deutschen technischen Kollegen scheinen in dieser Hinsicht nur mangelhafte Kenntnisse zu besitzen. Die ausländische Literatur, – Namen wie [George] Greenhill, [Joseph] Boussinesq – sind auch den hervorragendsten Vertretern, mit denen ich neuerdings wiederholt verhandelte, höchstens dem Hörensagen nach bekannt. Es ist so ähnlich wie mit unserer didaktischen Literatur. Auch die ist durchaus national begrenzt; es wird eine Tat sein, wenn es uns gelingt, diese Einschränkung zu durchbrechen.

Was die Hydrodynamik anging, gewann Klein dafür Augustus Edward Hough Love, der als Professor für Natural Philosophy in Oxford, Mitglied der Royal Society und Autor eines Standardwerks über Elastizitätstheorie eine Autorität auf dem Gebiet der Mechanik der deformierbaren Medien war. Horace Lamb, der in Cambridge bei George Gabriel Stokes und James Clerk Maxwell seine Karriere begonnen hatte und sich mit seinem Lehrbuch über Hydrodynamik als erste Autorität auf diesem Gebiet profiliert hatte, schrieb für den Mechanikband der Enzyklopädie den Artikel über „Schwingungen elastischer Systeme – insbesondere Akustik“. Den Artikel über Hydraulik überantwortete Klein dem österreichischen Ingenieur Philipp Forchheimer, der seit 1891 als Professor für Wasserbau und Brückenbau an der Technischen Hochschule Istanbul lehrte. Am Ende befürchtete Klein, dass er nicht genügend deutsche Autoren bekam. „Ich möchte gern einen deutschen Bearbeiter haben,“ schrieb er bei einem anderen Enzyklopädieartikel an Sommerfeld, mit dem er sich regelmäßig über Enzyklopädieangelegenheiten für die Physik- und Mechanikbände austauschte, „weil sonst die Sache so kommt, dass die ganze Mechanik der deformierbaren Körper von Ausländern bearbeitet wird.“[15]

Für einen „deutschen Universitätsdozenten, der in hohem Maße über die besondere Richtung seiner Lehrtätigkeit frei verfügen kann“, so Klein in seiner „Vorrede“ zum Mechanikband, sei die Veranstaltung von Vorlesungen, Übungen und Seminaren eine Möglichkeit, sich auch mit ferner liegenden Gebieten zu befassen. Er habe davon im Interesse seiner Tätigkeit für die Enzyklopädie immer wieder Gebrauch gemacht. „Insbesondere las ich im Winter 1899–1900 über Hydrodynamik und verband damit Seminarübungen über Schiffstheorie.“ Solche Veranstaltungen hätten ihn auch in Kontakt mit geeigneten Mitarbeitern gebracht, im Fall des Se-

---

[15] Klein an Sommerfeld, 10. Oktober 1899. DMA, HS 1977-28/A,170. Die Enzyklopädieartikel findet man unter http://gdz.sub.uni-goettingen.de/index.php?id=15&PPN=PPN360504019&L=1.

minars über Schiffstheorie mit Conrad H. Müller, der ihm dann als sein Assistent bei der Enzyklopädie eine so große Hilfe gewesen sei, dass er ihn auf dem Titelblatt des Mechanikbandes „ausdrücklich als Mitherausgeber“ nannte.[16]

1.2 Kleins Seminar über „Ausgewählte Kapitel der Hydrodynamik“ (1903/04)

Nach der Hydrodynamikvorlesung im Wintersemester 1899/1900 und dem daran anschließenden Seminar mit Müller veranstaltete Klein im Wintersemester 1903/04 erneut ein Seminar über „Ausgewählte Kapitel der Hydrodynamik“, diesmal mit Karl Schwarzschild als Mitveranstalter. Auch in diesem Fall betonte er den Zusammenhang mit dem Enzyklopädieprojekt und seinen weiteren Bestrebungen:[17]

> 1. Genereller Zweck dieses Seminars von Schwarzschild und mir: allseitiges Verständnis einzelner Teile der Mechanik unter besonderer Heranziehung des Technischen. Wirkliches Bedürfnis unserer Zeit: Brücke zwischen getrennten Entwicklungen. Cf. Facultas für Angewandte Mathematik. Cf. Die Lehrkräfte an den technischen Hochschulen und auch an den Universitäten. Literarische Bewegung: Cf. Enzyklopädie [...]
> 2. Form des Seminars. Verteilung des Stoffs auf Reihe von Vorträgen, welche die einzelnen Herren nach eingehender Vorbereitung halten. Später Eintragung in das Protokollbuch. Besondere Hilfe die uns dieses Mal von C. Müller und Wieghardt bereitet werden soll. Von Forchheimers hydraulischem Referate erzählen, welches den Anlass gibt. [...]

Karl Wieghardt gab in seinem Protokoll der ersten Seminarstunde weitere Einblicke in das von Klein beabsichtigte Programm. Die Hydrodynamik habe sich im 19. Jahrhundert einerseits in mathematischer Richtung und andererseits als anwendungsbezogene Wissenschaft sehr weit entwickelt. Dabei sei jedoch der Zusammenhang zwischen beiden Richtungen „nachgerade ein recht loser geworden und es dürfte an der Zeit sein, ihn wieder zu festigen. Von diesem Gesichtspunkte aus ist das kommende Seminar zu betrachten.“ Klein hatte schon in seiner Hydrodynamikvorlesung vom Wintersemester 1899/1900 auf die Turbulenz hingewiesen, deren Verständnis für den Brückenschlag zwischen Hydrodynamik und Hydraulik notwendig sei. Dementsprechend erklärte er auch jetzt: „Die Verhältnisse

[16] Klein, 1907, S. VI.

[17] Kleins Notizen zum Seminar 1903/04, Blatt 16: „Eröffnungsvortrag meinerseits, 28. Oktober 1903“. SUB, Handschriften, Cod. Ms. F. Klein 19E.

der Turbulenz nach allen Seiten zu betrachten, wird ein Hauptkapitel des Seminars sein müssen." In einem Vortrag sollte „Theoretisches zur Turbulenz" behandelt werden, und in zwei weiteren sollte es darum gehen, inwieweit die Boussinesqsche Theorie der „mean-mean-motion" in Übereinstimmung mit Versuchen von Bazin sei.[18]

Klein sah in der Arbeit des französischen Mathematikers Joseph Boussinesq ein Beispiel dafür, wie hydrodynamische Theorie mit hydraulischer Praxis – hier den Versuchen des Ingenieurs Henry Bazin über die Strömung in Kanälen – in Einklang zu bringen sei.[19] Bei den „Erscheinungen voll ausgebildeter Turbulenz, wie sie beim wirklichen Strömen in Röhren, Kanälen und Flüssen auftreten," so formulierten es die drei mit diesem Thema konfrontierten Seminarteilnehmer später in einer gemeinsamen Publikation, seien es „die Untersuchungen von Boussinesq, die hier am weitesten vordringen. (Essai sur la théorie des eaux courantes. Memoires présentés par divers savants à l'Acad. d. Sciences. Tome 23. Paris 1877 und Théorie de l'Ecoulement tourbillonant et tumultueux des liquides. Gauthier-Villars. Paris 1897.)"[20]

Die Turbulenz war aber nicht das einzige Thema des Seminars. Zuvor wurden „Hydrodynamische Grundgleichungen und Allgemeinste Folgerungen daraus" und klassische hydraulische Themen wie der „Ausfluss aus Gefäßen", „Überfälle [über ein Wehr]", „Stauprobleme" und die „[Strömung in] Leitungsröhren" behandelt, immer mit den Fragen im Hintergrund: „Was ergeben die Experimente? Wie stimmen dazu die theoretischen Ansätze?". Nach den drei Turbulenzreferaten ging es noch um „Wellenbewegung", „Das Strömen in den Flüssen" und die „Bewegung des Grundwassers". Klein selbst zog immer wieder eine Art Zwischenbilanz: „Ein von den vorigen Problemen sehr verschiedenes Problem ist das im 7. und 8. Vortrage behandelte Problem der Leitungsröhren", erklärte er zum Beispiel mit Blick auf die Rolle des Experiments. „Hier ist das Experiment nicht ein Notbehelf für die Schwäche unserer mathematischen Fähigkeiten, sondern ein stets notwendiger Bestandteil der einschlagenden Untersuchungen, da in den Leitungsröhren die Reibung des Wassers an den Wänden nicht, wie beim Ausfluss und Überfall, vernachlässigt werden

[18] Wieghardts Protokoll des Kleinschen Eröffnungsvortrages. Das Seminar über „Ausgewählte Kapitel der Hydrodynamik, WS 1903/04" ist protokolliert im Band 20 der Seminarprotokolle; es wird im folgenden zitiert als „Seminar 20"; die Scans der Protokolle sind online zugänglich via http://www.uni-math.gwdg.de/aufzeichnungen/klein-scans/klein/V20-1903-1904/V20-1903-1904.html.

[19] Zu Bazin und Boussinesq siehe Bazin, 2005; Schmitt, 2007; Darrigol, 2017.

[20] Hahn u. a., 1904, S. 412.

kann, sondern vielmehr die Hauptursache der hier charakteristischen Erscheinungen ist.“[21] Auch vor der Göttinger mathematischen Gesellschaft zog Klein mit einem „Bericht über den seitherigen Verlauf des Seminars“ Bilanz:[22]

> Im vorliegenden Semester galt es, die hydrodynamischen Erfahrungen und Ansätze der Physiker und Techniker vom mathematischen Standpunkte aus zu verstehen. Eine große Schwierigkeit verursacht bereits die Beschaffung der technischen Literatur. Denn diese ist auch in physikalischen Büchern, wie Kirchhoff, Lamb, Wien nur wenig berücksichtigt und fehlt auf den Universitätsbibliotheken durchweg; alles ist erst mühsam heranzuholen. Redner schildert insbesondere die wichtigen Experimentaluntersuchungen von Bazin, an die Boussinesq mit seinen theoretischen Arbeiten anknüpft; dieselben sind auch in dem Enzyklopädiereferat von Love nur mangelhaft berücksichtigt.
> Vom mathematischen Standpunkte aus mag man den Stoff folgendermaßen einteilen:
> a. gut definierte Probleme
> b. ziemlich schlecht definierte Probleme
> c. ganz schlecht definierte Probleme.
> In die erste Gruppe gehören die Probleme über Ausfluss, Überfälle und permanente Wellen auf stehenden Gewässern. Theoretisch sind dies Aufgaben der Potentialtheorie, die aber nur erst wenig Bearbeitung gefunden haben [...]
> Zur zweiten Kategorie zähle ich das Strömen des Wassers in Röhren und Kanälen, insbesondere auch die Kanalwellen (auf fließendem Wasser). Sowie die Bewegung nicht ganz langsam ist, entsteht die Erscheinung der Turbulenz. [...] Die Frage, wie man das Entstehen der Turbulenz theoretisch erklären soll, scheint noch ungeklärt; wir werden über die bisherigen Ansätze in den Vorträgen von Schwarzschild, Herglotz und Hahn bald Näheres hören.
> Zur dritten Kategorie nehme ich das Strömen in natürlichen Flüssen und die Grundwasserbewegung (die beide ebenfalls noch in weiteren Vorträgen behandelt werden sollen). Der Lauf der Flüsse ist schon darum theoretisch kaum anzupacken, weil der Fluss sich sein Bett selbst bildet und und im Einzelnen fortwährend modifiziert [...]

Eine Woche später, am 17. Februar 1904, stellte Gustav Herglotz im Seminar die Boussinesqsche Turbulenztheorie vor. Unter diesem Datum hielt Klein in seinen Notizen auch fest, dass er seinen Vortrag vor der mathe-

[21] Wieghardts Protokoll der „Bemerkungen von Herrn Geh. Rat Klein zum 3.–8. Vortrage“, Seminar 20, S. 63–65.

[22] Kleins Protokoll über seinen „Bericht über den seitherigen Verlauf des Seminars (vor der math. Gesellschaft am 9. Februar 1904)“, Seminar 20, S. 133–142.

matischen Gesellschaft über den bisherigen Seminarverlauf eigenhändig in das Protokollbuch eingetragen habe. „Bitte nun Schwarzschild und Herglotz, das Gleiche zu tun“.[23] Offenbar bedurfte es gelegentlich solcher Mahnung zur Disziplin des Protokollierens. Hahn und Herglotz kamen Kleins Wunsch nach, aber Schwarzschild hielt die Niederschrift seines Vortrags angesichts der kurz darauf mit Herglotz und Hahn in der *Zeitschrift für Mathematik und Physik* eingereichten Arbeit für überflüssig – ein Protokoll seines Vortrags ist nicht erhalten.[24]

Offenbar kam es bei diesen Vorträgen über die Frage der Turbulenzentstehung zu lebhaften Diskussionen. Die Turbulenz sei, so führte Klein vor der mathematischen Gesellschaft aus, „jedenfalls in hohem Maße von der Natur der Wände abhängig. Man kann fragen, ob dieselbe in sehr weiten Röhren den ganzen Querschnitt des Rohres erfüllen würde. Die Erfahrungen, die man bei Ballonfahrten bez. der Turbulenz der Luftbewegung macht, scheinen nicht dafür zu sprechen.“[25] Hahn, Herglotz und Schwarzschild verwiesen dazu auf theoretische Arbeiten von Lord Rayleigh und Lord Kelvin, die jedoch über das „Instabilwerden der Laminarbewegung“ zu keinen zwingenden Schlüssen führten, sodass „die ganze Frage von der mathematischen Seite aus als eine noch völlig offene zu bezeichnen“ sei.[26] „Der zweifellos vorhandene Einfluss der Wände wird durch die Grenzbedingungen der Theoretiker von vorne herein eliminiert!“, notierte sich Klein als einen wesentlichen Gesichtspunkt. In diesem Zusammenhang fiel auch zum ersten Mal ein Name, der für Kleins Bemühungen um die Eingliederung der technischen Mechanik unter dem Dach der Göttinger Universität sowie für die weitere Entwicklung der Strömungsmechanik im Allgemeinen und der Turbulenz im Speziellen noch eine besondere Rolle spielen sollte: „Interessante Mitteilungen von *Prandtl* über synthe-

23 Kleins Notizen zum „Seminar 1903/04“, Blatt 29. SUB, Handschriften, Cod. Ms. F. Klein 19E.

24 Schwarzschilds Vortrag fand vermutlich am 10. Februar statt; für diesen Tag existiert kein Protokoll. Herglotz referierte am 17. Februar „Allgemeines über turbulente Flüssigkeitsbewegung. Grundgleichungen von Boussinesq“; Hahns Vortrag vom selben Tag behandelte „Theorien von Boussinesq und ihr Vergleich mit der Erfahrung“, Seminar 20, S. 147–150 und S. 151–155. Die mit „März 1904“ datierte Veröffentlichung von Hahn, Herglotz und Schwarzschild sei durch das „Seminar über Hydraulik“ veranlasst, heißt es darin einleitend, dabei „haben wir über das Strömen des Wassers in Röhren und Kanälen berichtet“, Hahn u. a., 1904.

25 Kleins Protokoll über seinen „Bericht über den seitherigen Verlauf des Seminars (vor der math. Gesellschaft am 9. Februar 1904)“, Seminar 20, S. 135.

26 Hahn u. a., 1904, S. 412.

tische Konstruktionen von Bewegungsformen bei sehr geringer Viskosität.“ [27]



Abb. 1.1: Ludwig Prandtl als Professor an der technischen Hochschule in Hannover. (Quelle: Universitätsarchiv Hannover, Best. BCP).

1.3 Prandtls Berufung nach Göttingen

Ludwig Prandtl stand zu diesem Zeitpunkt noch am Anfang seiner Karriere. Er hatte an der technischen Hochschule in München ein Ingenieurstudium absolviert, 1900 an der Münchener Ludwig-Maximilian-Universität den „Dr. phil.“ erworben – die technischen Hochschulen hatten zu diesem Zeitpunkt noch kein Promotionsrecht – und war nach einem Intermezzo als Ingenieur bei der Maschinenfabrik Augsburg-Nürnberg (MAN) 1901 als Professor für Mechanik an die technische Hochschule in Hannover be-

[27] Kleins Notizen zum „Seminar 1903/04“, Blatt 29. SUB, Handschriften, Cod. Ms. F. Klein 19E.

rufen worden.[28] Schon gegen Ende seines Studiums, als Hilfsassistent seines Doktorvaters August Föppl, hatte Prandtl „alle Merkmale eines künftigen ausgezeichneten Mechanik-Professors“ erkennen lassen, wie Aurel Stodola von der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich, der Prandtl bei einer Naturforscherversammlung im September 1899 in München kennengelernt hatte, im Mai 1900 an Felix Klein schrieb. Stodola riet Klein, „diesen jungen Mann für die neuzubesetzende Stelle Ihres Institutes“ in Betracht zu ziehen.[29] Dabei handelte es sich um die außerordentliche Professur für technische Physik, die Klein mit den Mitteln der Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik eingerichtet hatte. Prandtl sei in der Tat „einer meiner fähigsten Schüler“, bekräftigte Föppl das Urteil Stodolas, und habe auch die Absicht, „später in die akademische Karriere einzutreten“; er habe Prandtl aber „den dringenden Rat gegeben, zuvor einige Jahre in der Praxis zu bleiben“.[30] Danach verzichtete Klein – vorerst – darauf, Prandtl die Berufung nach Göttingen anzubieten.

1904 suchte Klein erneut einen Kandidaten für die Professur für technische Physik, nachdem der 1900 dafür auserkorene Hans Lorenz diese Stelle aufgegeben hatte. Bislang hatte sich die technische Physik in Göttingen nicht so entwickelt, wie Klein es sich erhofft hatte, denn nun suchte er „eine „allererste Kraft“, die mit ihrer „technischen Autorität“ diesem Fach unter dem Dach der Universität Rang und Ansehen verleihen konnte.[31] Stodola, den er zuerst dafür im Auge hatte, war jedoch für die nur als Extraordinariat ausgewiesene Professur nicht zu haben. Danach erkundigte sich Klein erneut nach Prandtl. „Ihren Gedanken, in erster Linie Herrn Dr. Prandtl in Betracht zu ziehen, halte ich für sehr glücklich“, bekräftigte Anton Rieppel diese Wahl. Rieppel wusste als Mitglied der Göttinger Vereinigung um die hochgespannten Erwartungen an diese Stelle, und als Direktor der MAN in Nürnberg kannte er auch Prandtls Fähigkeiten in der technischen Praxis. „Jedenfalls war ich mit seiner Tätigkeit bei uns sehr zufrieden und habe auch jetzt immer noch gern mit ihm zu tun.“[32]

Prandtl ahnte um diese Zeit noch nicht, dass Göttingen bald seine neue Wirkungsstätte werden sollte. Von Hannover aus, wo Prandtl seit 1901 als

---

28 Eckert, 2017b.

29 Stodola an Klein, 13. Mai 1900. SUB, Handschriften, Cod. Ms. F. Klein 2F,3.

30 Föppl an Klein, 17. Mai 1900. SUB, Handschriften, Cod. Ms. F. Klein 2F,3.

31 Manegold, 1970, S. 231.

32 Rieppel an Klein, 7. März 1904. SUB, Handschriften, Cod. Ms. F. Klein, 2F,3. Siehe dazu auch Rotta, 1985.

Mechanikprofessor lehrte, war es jedoch keine weite Reise nach Göttingen. Da er sich schon bei seiner Industrietätigkeit mit Strömungsfragen beschäftigt und im November 1903 darüber auch im Hannoveraner Bezirksverein des Vereins Deutscher Ingenieure (VDI) berichtet hatte,[33] dürften ihm die Vorträge des Hydrodynamikseminars im Wintersemester 1903/04 das eine oder andere Mal eine Reise nach Göttingen wert gewesen sein. Kleins Notiz vom 17. Februar 1904 über die interessanten Mitteilungen Prandtls bezieht sich vermutlich auf einen Diskussionsbeitrag Prandtls zu den Seminarvorträgen von Herglotz und Hahn am selben Tag. Prandtl beschäftigte um diese Zeit vor allem das Problem, wie sich Strömungen am Rand von festen Wänden verhalten. Dennoch interessierte ihn auch die „Turbulenzarbeit", die Hahn, Herglotz und Schwarzschild gerade an die *Zeitschrift für Mathematik und Physik* geschickt hatten. Er hielt „die ganze Betrachtung für sehr nützlich und wertvoll", wie er Schwarzschild schrieb. Über seine eigenen Arbeiten verriet er nur, dass er darüber demnächst beim III. Internationalen Mathematiker-Kongress in Heidelberg vortragen werde.[34]

Klein tat alles, um Prandtl für die vakante Professur für technische Physik in Göttingen zu gewinnen. Auch Schwarzschild hoffte, dass er mit Prandtl als Kollegen bald in engeren Kontakt kommen würde. Von der schwebenden Berufungsangelegenheit habe er schon von seinem Kollegen Runge gehört, bedankte sich Prandtl für Schwarzschilds Mitteilung, dass man ihm die Göttinger Professur anbieten wolle. Carl Runge war Mathematikprofessor an der technischen Hochschule in Hannover und über die Göttinger Verhältnisse bestens informiert. Er stand selbst seit längerer Zeit im Visier Kleins und sollte noch im gleichen Jahr fast gleichzeitig mit Prandtl nach Göttingen auf eine Professur für angewandte Mathematik berufen werden.[35] Prandtl fühlte sich in Hannover jedoch „ziemlich festgewurzelt" und wollte Schwarzschild „einstweilen nicht viel Hoffnung machen".[36]

Dennoch ließ ihm die Sache keine Ruhe: „Was für Personal hat das Laboratorium?" und wie sei es um eine Assistentenstelle bestellt, fragte er

[33] Prandtl, 1904.

[34] Prandtl an Schwarzschild, 17. April 1904. SUB, Handschriften, Cod. Ms. K. Schwarzschild 609. Zu Prandtls Heidelberger Vortrag und dem Beginn der Grenzschichttheorie siehe Kap. 2.4.

[35] Runge, 1949, S. 98–116.

[36] Prandtl an Schwarzschild, 28. April 1904. SUB, Handschriften, Cod. Ms. K. Schwarzschild 609.

Schwarzschild.[37] Dann legte er Klein selbst in einem langen Brief dar, was er sich „über die Göttinger Maschinenprofessur zurechtgelegt“ hatte. „Einerseits lockt mich das eigene Laboratorium und die größere freie Zeit, nicht zum mindesten aber der schöne Göttinger wissenschaftliche Verkehr. Andererseits ist mir meine Tätigkeit in Hannover in den nicht ganz drei Jahren meines Hierseins sehr lieb geworden.“ Er gab auch zu bedenken, dass er in der Universitätshierarchie in Göttingen als Extraordinarius geringer eingestuft werde als an der technischen Hochschule in Hannover, wo er „ordentliches Mitglied“ der Abteilung für Maschineningenieurwesen war. Am meisten aber sorgte er sich um seine künftige Stellung zwischen Universitäts- und Ingenieurwissenschaft:[38]

> Das schwerste Bedenken entsprang meinem Zugehörigkeitsgefühl zur Technik. Es war seit langem ein Lieblingsgedanke von mir, nach Kräften an der Hebung der Wissenschaftlichkeit im Unterricht an den technischen Hochschulen mitzuarbeiten. Unter diesem Gesichtspunkt scheint mir der Übertritt an die Universität nur dadurch zu rechtfertigen zu sein, dass ich in dieser Stelle, die wie ich denke, nicht meine letzte sein wird, außerordentliche Gelegenheit haben würde, meinen eigenen wissenschaftlichen Wert zu heben und mich für künftige Aufgaben vorzubereiten, andererseits auch durch den Gedankenaustausch mit den Theoretikern noch manche der Praxis naheliegende Frage lösen helfen könnte.

Prandtls „Bedenken“ konnten Klein nur darin bestärken, ihn als Nr. 1 auf die Berufungsliste zu setzen. Die „Hebung der Wissenschaftlichkeit“ bei den Technikern entsprach ganz seinen eigenen Bestrebungen. Prandtl verbinde „mit der Sachkenntnis des Ingenieurs und der Beherrschung des mathematischen Apparats eine starke Kraft der Intuition und eine große Originalität des Denkens“, so begründete er der Fakultät gegenüber seinen Berufungsvorschlag, und in dieser Form wurde er auch am 10. Mai 1904 dem Preußischen Kultusministerium in Berlin übersandt. Am 12. Juni reiste Prandtl selbst nach Berlin, um mit dem zuständigen Referenten im Ministerium persönlich über die Berufung zu verhandeln. Mit seinen Gehaltsvorstellungen konnte er sich nicht durchsetzen, aber Klein regelte dieses Problem, indem er Prandtl einen Zuschuss aus den Mitteln der Göttinger Vereinigung zusicherte. Es kam noch zu einigem Hin und Her zwischen Göttingen, Berlin und Hannover, wo man das Ministerium drin-

---

[37] Prandtl an Schwarzschild, 2. Mai 1904. SUB, Handschriften, Cod. Ms. K. Schwarzschild 609.

[38] Prandtl an Klein, 4. Mai 1904. SUB, Handschriften, Cod. Ms. F. Klein, 2F,3. Siehe dazu auch Rotta, 1985 und Eckert, 2017b, Kap. 2.5.

gend bat, „geeignete Schritte [zu] tun, um Herrn Professor Dr. Prandtl der Technischen Hochschule zu Hannover zu erhalten“, doch der Referent im Berliner Ministerium teilte den Hannoveranern am 1. Juli 1904 mit, dass die Verhandlungen abgeschlossen seien und Prandtl dem Ruf nach Göttingen definitiv folgen werde.[39]

Klein sah in Prandtls Berufung einen wichtigen Schritt auf dem Weg zu einer Ansiedlung technischer Disziplinen unter dem Dach der Universität. Ein weiterer Schritt war die Berufung von Runge, für den Klein zuvor die Einrichtung einer ordentlichen Professur für angewandte Mathematik erreicht hatte. Ähnlich wie bei seinen Bemühungen um Prandtl begründete er dies bei Runge mit dessen „Beherrschung der Mathematik nach der wirklichen Ausführung“. Die angewandte Mathematik sollte damit in Göttingen ein Zentrum erhalten.[40] Wie Klein im Sommer 1905 Althoff schrieb, hatten sich „die Verhältnisse im letzten Jahre durch das Hierherkommen des Prof. Prandtl und Runge in hervorragend glücklicher Weise gestaltet.“[41]

1.4 Die Anfänge der Strömungsforschung in Prandtls Institut für angewandte Mechanik

Wie eng die Berufungen Runges und Prandtls mit Kleins Bestrebungen verknüpft waren, kam nicht nur in der zeitlichen Nähe zum Ausdruck – beide traten ihre Stellen in Göttingen zum Beginn des Wintersemesters 1904/05 an –, sondern auch durch eine 1905 geschaffene institutionelle Verbindung ihrer Lehr- und Forschungstätigkeit. In diesem Jahr zog das aus allen Nähten platzende physikalische Institut um in einen Neubau, sodass die alten Räumlichkeiten, in denen vorher die technische Physik neben der übrigen Physik ein Schattendasein geführt hatte, nun von Prandtl und Runge bezogen werden konnten. „Nach dem Umzug des physikalischen Institutes in das neue Haus an der Bunsenstraße wurden die alten Räume an die ‚angewandte Mathematik‘ und die ‚technische Physik‘ verteilt, so zwar, dass die an das Maschinenlaboratorium angrenzenden Räume am Leinekanal den Zwecken der technischen Physik, die an der Prinzenstraße denen der angewandten Mathematik überwiesen wurden; beiden Instituten gemeinsam ist ein Hörsaal und ein Lesezimmer.“ So charakterisierten

[39] Siehe ausführlich dazu Rotta, 1985 und Eckert, 2017b, Kap. 2.5.

[40] Klein an Althoff, 28. Juni 1904. Zitiert in Manegold, 1970, S. 232.

[41] Klein an Althoff, 7. Juni 1905. GStAPK VI. HA, Nl Althoff, Nr. 798, Blatt 245.

Prandtl und Runge in einem gemeinsamen Aufsatz ihre neue Wirkungsstätte. „Die Zusammengehörigkeit der beiden Institute, die ja keineswegs eine bloß äußerliche ist, ist bald nachher durch die gemeinsame Bezeichnung als ‚Institut für angewandte Mathematik und Mechanik' zum Ausdruck gekommen."[42] Die Bezeichnung „technische Physik" wurde durch „angewandte Mechanik" ersetzt, was auch besser zu Runges „angewandter Mathematik" passte und beide schon vom Namen her in die Nähe der „Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik und Mathematik" rückte, die dafür sorgte, dass den neuen Fächern immer ausreichend Mittel zur Verfügung stehen würden.

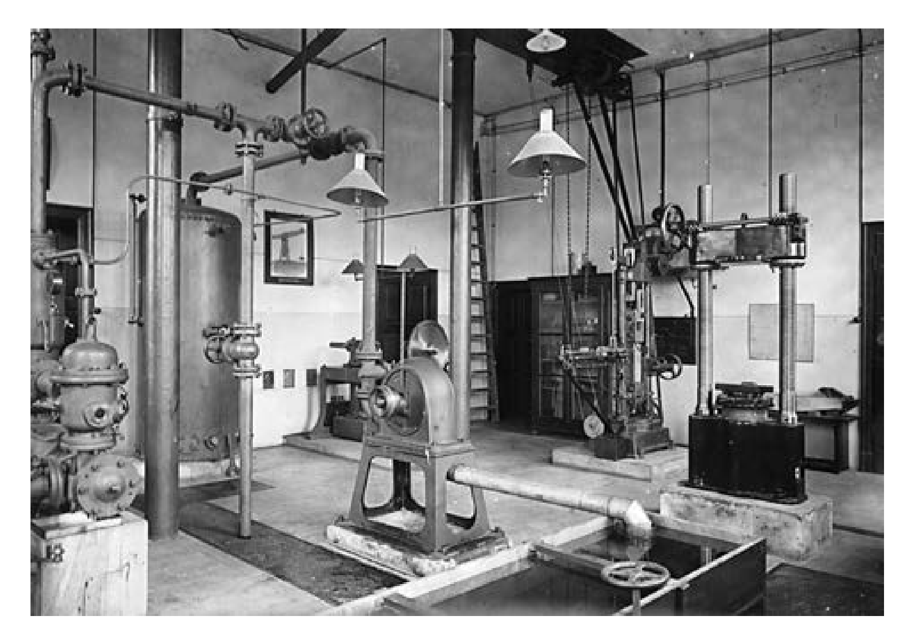


Abb. 1.2: Der Maschinensaal in Prandtls Institut. Rechts auf dem Betonsockel befindet sich eine Vorrichtung für Festigkeitsuntersuchungen; die übrigen Gerätschaften dienten hydraulischen Versuchen: links hinten ein Windkessel, in der Mitte eine Zentrifugalpumpe und vorne rechts ein Wassertrog für das Studium der mit der Pumpe erzeugten Strömung (Quelle: DLR, Bildarchiv, Bildnr: FS-1563).

Prandtl hatte große Pläne, was die Ausstattung seines Instituts anging. Unter seinem Vorgänger galt das erste Interesse der Untersuchung von Wärmemaschinen als einem wesentlichen Teil der „technischen Physik";

[42] Runge u. Prandtl, 1906.

Prandtl legte nun den Schwerpunkt getreu der neuen Institutsbezeichnung auf die angewandte Mechanik. Unter der Überschrift „Ausbau der Instituteinrichtung“ gab er der Göttinger Vereinigung gleich nach seinem Amtsantritt einen Überblick über seine Vorhaben. Auf dem Gebiet der Wärmekraftmaschinen sei das Institut bereits bestens ausgestattet, sodass für den Ausbau „zunächst auf die Gebiete der Festigkeits-Untersuchungen und auf die Hydraulik im weitesten Sinne (einschl. Luft-, Gas- und Dampfbewegung) Rücksicht zu nehmen sei.“ Bei der Festigkeitslehre konnte Prandtl an seine Assistententätigkeit bei August Föppl an der technischen Hochschule in München anknüpfen, wo er bereits mit Bruch-, Biege- und Torsionsexperimenten Erfahrungen gesammelt hatte. Nun wollte er auch in Göttingen für die Anschaffung entsprechender Versuchseinrichtungen sorgen. Auf hydraulischem Gebiet betrat er jedoch Neuland. Ein bereits vorhandener Brunnen, der mit einer Pumpe und einem Windkessel versehen war, sollte mit einem „Überfall zur Wassermessung“ erweitert werden. „Ein vom Druckwasser der Pumpe zu treibendes Peltonrad, eine Zentrifugalpumpe und eine hiervon getriebene Turbine sollen die hydraulischen Maschinen ergänzen.“ Mit einem zusätzlichen Luftventil sollte die Pumpe auch für Versuche mit Druckluft genutzt werden können. Außerdem plante er „Versuche mit Dampfinjektoren“. Neben diesen, auf die technische Anwendung abzielenden Einrichtungen sollte aber auch die Grundlagenforschung nicht zu kurz kommen: „Zur Untersuchung der Strömungsgesetze in Flüssigkeiten ist ein besonderer hydraulischer Versuchsapparat geplant.“ [43]

Ein Jahr später konnte Prandtl, was die „Hydraulik im weitesten Sinne“ anging, bereits die Fertigstellung der Anlagen für Druckluftversuche, einer neuen „Wassermesseinrichtung“ und einer „hydraulischen Presse von 150 t Druckleistung“ bekannt geben. „Eine Einrichtung für Versuche zur Hydrodynamik (im Wasserversuchsraum) ist in der Fertigstellung begriffen.“ Als nächstes plane er „die Aufstellung eines Rundlaufapparates zu Versuchen über Luftbewegung, sowie eines Ventilators“. Die „Beschaffung hydraulischer und aerodynamischer Apparate“ veranschlagte er mit 2500 Mark, eine Summe, die ihm die Göttinger Vereinigung ohne weiteres bewilligte. [44]

[43] Anlage 9 zum Bericht Kleins bei der Generalversammlung der Göttinger Vereinigung am 17. Dezember 1904. AMPG, Abt. III, Rep. 61, Nr. 2328.

[44] Bericht Prandtls zur Sitzung der Göttinger Vereinigung am 10. Dezember 1905. AMPG, Abt. III, Rep. 61, Nr. 2329.

Einer Institutsbeschreibung von 1906 zufolge befand sich der „Wasserversuchsraum“ für hydrodynamische Versuche getrennt vom „Maschinensaal für Festigkeitslehre und Hydraulik“ (Abb. 1.2) im Erdgeschoss der Prandtlschen Abteilung, der Saal für aerodynamische Versuche darüber im ersten Stock.[45] Das zentrale Experimentiergerät im Wasserversuchsraum war ein „hydrodynamischer Universalapparat“, mit dem die in Prandtls Heidelberger Grenzschichtvortrag präsentierten Umströmungen von verschiedenen Körpern mit größerer Präzision durchgeführt werden konnten. Anstelle eines per Hand über eine Kurbel betriebenen Wasserrades sollte eine Pumpe für einen Wasserumlauf sorgen, der mit Sieben und Leitschaufeln eine möglichst gleichförmige Anströmung der Hindernisse ermöglichen sollte. Dazu gehörten Messgeräte, mit denen der Druck (und damit auch die Strömungsgeschwindigkeit) mit großer Genauigkeit bestimmt werden konnte. 1906 war dies noch „ein der Vollendung entgegengehender“ Apparat; dass es sich dabei im Unterschied zu Prandtls Hannoveraner Wasserkanal um ein sehr komplexes Versuchsgerät handelte, zeigte sich erst anhand der detaillierten Beschreibung im Rahmen der ersten experimentellen Grenzschicht-Doktorarbeit.[46] Im darüber liegenden Saal für die Aerodynamik war das zentrale Versuchsgerät ein „Rundlauf für Anemometeruntersuchung und sonstige aerodynamische Versuche“, der im Grundriss des Gebäudes als Kreis mit einem Durchmesser von etwa 5 m angedeutet ist.[47] Mit Rundläufen wurden in der Frühzeit der Luftfahrt der Luftwiderstand und der Auftrieb von Modell-Fluggeräten gemessen, sie wurden jedoch bald durch Windkanäle ersetzt.[48]

1.5 Aerodynamische Forschung für Luftschiffe

Es ist bezeichnend für Prandtls Verständnis von „Hydraulik im weitesten Sinne (einschl. Luft-, Gas- und Dampfbewegung)“, dass er dabei schon die Aerodynamik einbezog. Zunächst galt sein Forschungsinteresse dabei den Strömungen in Dampf- und Gasturbinen, die eher unter den Begriff der Gasdynamik fielen. Darüber hatte Prandtl selbst 1905 einen Enzyklo-

[45] Runge u. Prandtl, 1906, Abb. 2.

[46] Hiemenz, 1911. Im Gebäudegrundriss von 1906 ist der Apparat nur grob angedeutet, Runge u. Prandtl, 1906, Abb. 2, Saal 18.

[47] Runge u. Prandtl, 1906, Abb. 2, Saal B23.

[48] Anderson, 1998, Kap. 4.

pädieartikel verfasst;[49] kurz danach vergab er auf diesem Gebiet Doktorarbeiten an seine Studenten Ernst Magin, Theodor Meyer und Adolf Steichen, in denen Pionierarbeit auf dem Gebiet der Überschallströmungen geleistet wurde.[50] Die für langsame Luftbewegungen (verglichen mit der Schallgeschwindigkeit) zuständige Aerodynamik wurde in der Enzyklopädie ebenfalls behandelt,[51] war aber um 1900 im Vergleich zur Hydraulik nur von geringem technischen Interesse. Angesichts der Flugversuche Otto Lilienthals und der Gebrüder Wright wurde zwar dem Problem des aerodynamischen Auftriebs schon einige Aufmerksamkeit gewidmet, doch als Prandtl die künftige Forschung an seinem Institut plante, nahm die Aerodynamik noch keine zentrale Rolle als Technikwissenschaft für die Luftfahrt ein. Der Anstoß dazu ging auch nicht von den „fliegenden Kisten“ der frühen Flugpioniere aus, sondern von den riesigen, gasgefüllten Luftschiffen, die unter dem Namen ihrer Konstrukteure „Zeppelin“ und „Parseval“ bereits den Luftraum eroberten. Die erste Frage dabei galt auch nicht dem aerodynamischen Auftrieb, sondern dem aerodynamischen Widerstand dieser Giganten der Lüfte. Und wieder war es der umtriebige Felix Klein, der diesen Anstoß für seine anwendungsorientierten Bestrebungen in Göttingen nutzbar machte.

Im Sommer 1906 hatten hochrangige Politiker, Militärs und Industrielle in Berlin eine Gesellschaft gegründet, „deren Zweck die Förderung der Luftschiffahrt“ sein sollte:[52]

> Sie soll in möglichst naher Anlehnung an bereits bestehende Organisationen, auch der Heeresverwaltung, die einschlägigen Fragen bearbeiten, Versuche anstellen, Erfindungen erwerben und ausarbeiten, sowie alle zweckmäßig erscheinenden Schritte tun, um die Aeronautik als Technik und Industrie zu entwickeln.

Man einigte sich „einstweilen provisorisch“ auf den Namen „Motorluftschiff-Studien-Gesellschaft m. b. H.“, begriff das Aufgabenspektrum aber zunächst sehr weit. Um der Gefahr einer Zersplitterung vorzubeugen plädierte ein Mitglied dafür, „dass die M. St. G., wie ihr Name sagt, sich mit Motorluftschiffen und nicht – wenigstens vorläufig nicht – auch mit

[49] Prandtl, 1905b.

[50] Magin, 1908; Meyer, 1908; Steichen, 1909; zur Bedeutung für die Gasdynamik siehe Settles u. a., 2009.

[51] Finsterwalder, 1902.

[52] Gründungsaufruf, Mai 1906, abgedruckt in Rotta, 1990a, S. 20–21.

Flugmaschinen beschäftigen soll."[53] In einem technischen Ausschuss, der in verschiedene Fachgruppen untergliedert war, sollten die anfallenden Aufgaben im einzelnen weiter spezifiziert werden, von der Meteorologie bis zur Entwicklung geeigneter Motoren. Um die Aerodynamik kümmerte sich unter dem Vorsitz von Felix Klein eine „dynamische Gruppe". Sie stellte gleich bei ihrer konstituierenden Sitzung am 6. Januar 1907 einen Antrag auf „Bewilligung von 5000 M. für Vorarbeiten über Luftwiderstandsmessungen an Ballonmodellen, über deren besondere Verwendung sich die Gruppe nach persönlicher Bezugnahme der Herren v. Parseval und Prandtl schlüssig machen wird." Klein präsentierte als Sonderdruck auch Finsterwalders Enzyklopädieartikel über Aerodynamik und Prandtls einschlägige Arbeiten „über das Zustandekommen des Flüssigkeitswiderstandes durch Wirbelbildung und über Wellenbewegungen in Luftstrahlen von Überschallgeschwindigkeit", womit er den versammelten Mitgliedern seiner Gruppe nicht nur Prandtls Expertise, sondern auch Göttingen als Standort weiterer aerodynamischer Forschungen nahe brachte. Dazu hatte er den Mitgliedern schon vorher ein „Programm für anzustellende Messungen von Luftwiderständen usw. an ruhenden Objekten der Herren Wiechert und Prandtl" übersandt.[54]

Emil Wiechert gehörte als Direktor des Instituts für Geophysik wie Prandtl zu den Vertretern der anwendungsnahen Disziplinen an der Göttinger Universität. Er hatte sich insbesondere als Erfinder und Konstrukteur von Instrumenten für seismologische Untersuchungen und als Gründer der Association Internationale de Seismologie einen Namen gemacht.[55] Unter Wiecherts Leitung wurde 1902 in Göttingen eine Erdbebenwarte errichtet, die zum Muster für den Aufbau eines weltweiten Netzes von seismologischen Stationen wurde. In dem von Wiechert und Prandtl verfassten „Programm", das Klein seinem Antrag für Vorarbeiten über Luftwiderstandsmessungen an Ballonmodellen als Anhang beifügte, ging es ebenfalls um zukunftsweisende neue Messvorrichtungen. Anders als bei den für die Messung des Schiffswiderstands vielerorts errichteten Schleppversuchsanstalten sollte bei Luftschiff- und Ballonmodellen die Luft mit einem Ventillator am ruhenden Modell vorbeigeführt werden.

[53] Richard von Kehler (Hauptmann eines Luftschiffer-Bataillons) an Althoff, 7. September 1906. GStAPK VI. HA, Nl Althoff, Nr. 531: Motorluftschiff-Studiengesellschaft, Blatt 27.

[54] Protokoll der Sitzung der dynamischen Gruppe am 6. Januar 1907, abgedruckt in Rotta, 1990b, S. 13–16.

[55] Mulligan, 2001.

Theoretisch seien beide Verfahren gleichwertig, da es nur auf die Relativbewegung zwischen der Luft und dem Modell ankommt, aber praktisch seien Messungen am ruhenden Modell leichter durchzuführen.[56]

Wiechert beteiligte sich an den weiteren Planungen – wenn überhaupt – nur noch im Hintergrund. Um so mehr wurde das Projekt nun zu einer neuen Herausforderung für Prandtl. Schon die im Kleinschen Antrag in einem weiteren Anhang dazu formulierten Überlegungen trugen nur noch Prandtls Unterschrift. Die zentrale Versuchsapparatur bestünde aus einem Windkanal, der in zwei Ausführungen realisiert werden könne. Bei der einen würde „beständig Luft aus der Atmosphäre eingesaugt und am anderen Ende wieder ins Freie entlassen", bei der anderen „kreist ein und dieselbe Luftmenge durch den Apparat". In beiden Fällen bestünde der zentrale Teil der Apparatur aus einer Röhre „von etwa 3 Meter Durchmesser" und Messinstrumenten, mit denen an einem Modellkörper mit einem Durchmesser „bis zu etwa 40 cm bei einer Länge von 1,5 bis 2 Meter" die Luftströmung von einem Beobachtungsraum aus gemessen werden konnte. Bei der Variante mit einem zirkulierenden Luftstrom müsse man „gerade so wie bei meinen hydraulischen Versuchsapparaten" mit Sieben und Umlenkschaufeln „allerhand künstliche Mittel anwenden, um die im Ventilator entstandenen heftigen Wirbel wieder zu beseitigen". Diese Ausführung besitze aber den „Vorteil, bei jedem Wetter arbeiten zu können". Später nannte man diese beiden Ausführungsarten die „Eiffel'sche" (nach der von Gustave Eiffel wenig später in Paris aufgebauten aerodynamischen Versuchsstation) und „Göttinger Bauart". Die maximale Luftstromgeschwindigkeit nahm Prandtl „einstweilen zu 20 m/sec" an. In diesem Zusammenhang verwies er auf die geometrische Ähnlichkeit der Umströmung von Modell und wirklichem Luftschiff als grundlegendes Prinzip aller Modellversuchsanstalten; aber er räumte ein, dass „auf strenge Ähnlichkeit in Bezug auf Reibung" bei den aerodynamischen Versuchen im Windkanal „ebenso wie bei den Schiffs-Modell-Schleppanstalten verzichtet werden" müsse. Die Kosten einer solchen „Motorluftschiff-Modellversuchsanstalt" würden sich bei einer Betriebsdauer von drei Jahren auf rund 50.000 Mark belaufen.[57]

[56] Anhang I zu Kleins Antrag an die dynamische Gruppe der Motorluftschiff-Studiengesellschaft, 27. Dezember 1906, abgedruckt in Rotta, 1990a, S. 298–299.

[57] Anhang II zu Kleins Antrag an die dynamische Gruppe der Motorluftschiff-Studiengesellschaft, 27. Dezember 1906, abgedruckt in Rotta, 1990a, S. 299–300.

Die Motorluftschiff-Studiengesellschaft gab sofort grünes Licht für die Ausführung dieser Pläne. Die „Motorluftschiff-Modellversuchsanstalt“ sollte am Stadtrand von Göttingen errichtet werden. Bereits zum 1. März 1907 stellte Prandtl dafür Georg Fuhrmann ein, der gerade an der technischen Hochschule in Hannover sein Ingenieurdiplom erworben hatte. Danach wurden – noch im Prandtlschen Universitätsinstitut – Strömungsversuche an kleinen Luftschiffmodellen mit einem Durchmesser von 7 cm in einem „Saugrohr“ mit einem Innendurchmesser von 30 cm (als vorläufigem Windkanal) vorgenommen. Sie zeigten, dass man den Luftwiderstand zigarrenförmiger Luftschiffe schon deutlich verringern konnte, wenn die runde Heckform durch ein spitz auslaufendes Heck ersetzt würde – ein Ergebnis, das August von Parseval sofort bei der Konstruktion neuer Luftschiffe in die Praxis umsetzte.[58] Die Versuche mit dem Saugrohr gaben Prandtl auch Hinweise für den geplanten Windkanal der Versuchsanstalt. Es habe sich herausgestellt, „dass die offene Bauart selbst bei ganz mäßigen Störungen an der Einsaugöffnung zu sehr fühlbaren Störungen der Luftströmungen [am Modell im Inneren des Saugrohres] Anlass gibt“, hielt er in einem Schreiben an die Motorluftschiff-Studiengesellschaft im September 1907 fest, in dem er die Kosten für den Windkanal veranschlagte. Deshalb komme dafür „nur die geschlossene Bauart in Frage“. Auf „Wunsch der Berliner Herren, dass die Anlage möglichst billig werden sollte“, habe er sich auch veranlasst gesehen, „den Querschnitt des Versuchskanals auf 2x2 m herabzusetzen.“[59]

Die „Berliner Herren“ genehmigten Prandtls Plan. „Die Motorluftschiff-Studiengesellschaft m. b. H. in Berlin hat in ihrer Herbstversammlung 1907 die Einrichtung einer Modellversuchsanstalt in Göttingen beschlossen“, berichtete Prandtl am 22. Februar 1908 der Göttinger Vereinigung, die in diesem Jahr ihr zehnjähriges Bestehen feierte. Diese unter seiner Leitung errichtete Anstalt sei „jetzt in ihren Einrichtungen fast fertig“, und wenn sie auch „nicht eigentlich“ zu seinem Institut an der Göttinger Universität gehöre, so hoffe er doch, „sie durch Ausführung von wissenschaftlichen Forschungsarbeiten den Zwecken des Instituts dienstbar zu machen.“[60]

---

[58] Rotta, 1990a, S. 36.

[59] Prandtl an die Motorluftschiff-Studiengesellschaft, 10. September 1907, abgedruckt in Rotta, 1990a, S. 37–38.

[60] Bericht Prandtls an die Göttinger Vereinigung, 22. Februar 1908. AMPG, Abt. III, Rep. 61, Nr. 2331.

1.6 Kleins Ziele beim Hydrodynamikseminar 1907/08

Die Göttinger Modellversuchsanstalt und die daraus hervorgegangene Aerodynamische Versuchsanstalt sind Gegenstand anderer historischen Studien. Hier ist der Aufbau dieser außeruniversitären Forschungseinrichtungen nur insofern von Interesse, als er zeitgleich mit dem von Klein organisierten Hydrodynamikseminar im Wintersemester 1907/08 stattfand und den Seminarteilnehmern vor Ort Kleins Bemühungen um Praxisnähe deutlich machte. Anders als bei seinem mit Schwarzschild veranstalteten Hydrodynamikseminar 1903/04 bezog Klein diesmal gleich drei Professorenkollegen von den anwendungsorientierten Disziplinen mit ein: „Prof. Klein, Runge, Wiechert, Prandtl, Mittwoch, 11–1 Uhr“, so kündigte das Vorlesungsverzeichnis Veranstalter und Zeit dieses Seminars an, in dem es „Vorträge der Mitglieder über Fragen der Hydrodynamik und Aerodynamik“ zu hören gab.[61] Kleins Notizen ist zu entnehmen, dass er auch noch seinen ehemaligen Assistenten Conrad Müller einbezog, da er sich über Wiecherts Mitwirkung nicht sicher war. Für Klein war dieses Seminar die Fortsetzung und der krönende Abschluss seiner bisherigen Anstrengungen auf diesem Gebiet, von seiner Hydrodynamikvorlesung 1899/1900 über die einschlägigen Artikel in dem von ihm redigierten Mechanikband der *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* bis zum vier Jahre zurückliegenden Hydrodynamikseminar.[62] „Allgemeine Absicht: Verbindung der Theorie mit der Praxis“, so wollte er auch dieses Mal die Seminarteilnehmer gleich am ersten Tag mit seinem Hauptanliegen vertraut machen. „Heranziehen von Mathematikern, die über praktische Probleme zu arbeiten wissen.“ Dazu notierte er: „Praktischer Hintergrund: Das Institut für angewandte Mechanik. Prandtls hydraulischer Apparat etc. bis hin zu der geplanten Luftwiderstandsversuchsstation.“[63]

In diesem Wintersemester 1907/08 war für Klein der Verweis auf die neue „Luftwiderstandsversuchsstation“ noch in einem anderen Zusammenhang bedeutsam. Diese sei, so hielt er den Industriellen in der Göttinger Vereinigung die Anwendungsnähe „unserer Laboratorien“ vor

---

[61] Vorlesungsverzeichnis der Universität Göttingen, Wintersemester 1907/08, S. 16.

[62] Auch im darauffolgenden Sommersemester ging es wieder um Hydrodynamik, jedoch sollten dabei nur noch „die Restbestände vom vorigen Semester erledigt“ und weitere Anwendungen insbesondere „Elemente der dynamischen Meteorologie“ behandelt werden. Seminar 27, Protokollbuch S. 129.

[63] Kleins Notizen zu „Hydrodynamisches Seminar 1907/08“, Blatt 2: „I. Sem. 30. Oktober 07.“ SUB, Handschriften, Cod. Ms. F. Klein 20F.

Augen, nur eine von zwei im Aufbau begriffenen Versuchsstationen. Während Prandtls Anstalt mit Mitteln der Motorluftschiff-Studiengesellschaft errichtet werde, fördere „die Marine, in Verbindung mit der Heeresverwaltung“ unter Leitung von Theodor Simon, dem Direktor des Göttinger Instituts für angewandte Elektrizität, die Errichtung einer „Anstalt für Untersuchungen über drahtlose Telegraphie, die so umfangreich gedacht ist, dass sich beispielsweise direkte Verbindung mit Kiel ermöglichen wird.“[64]

Damit bestand zur Marine von Göttingen aus eine doppelte Verbindung, denn auch die „Hydrodynamik des Schiffes“ – diesen Zusatz gab Klein dem Seminar in seinen Notizen, war vor dem Hintergrund der aggressiven Flottenpolitik im Wilhelminischen Kaiserreich von größter militärischer Relevanz. Klein erwartete deshalb von den Seminarteilnehmern auch die Bereitschaft, sich auf Gegenstände einzulassen, die wie alle mit dem Schiffbau zusammenhängenden Fachgebiete sonst nur an technischen Hochschulen gelehrt wurden. Umgekehrt erwartete er aber auch „Kenntnisse in theoretischer Mechanik resp. Potentialtheorie“, was den Kreis der Seminarteilnehmer von vornherein auf Studenten höherer Semester beschränkte. Sie sollten neben diesen Theorievorlesungen insbesondere auch die Lehrveranstaltungen von Runge und Prandtl besucht haben. „Nur für ältere Leute“, heißt es folgerichtig dazu in Kleins Notizen.[65]

Klein beließ es nicht bei persönlichen Notizen. Beim ersten Seminartermin hielt er selbst – wie bei den früheren Seminaren – den Eröffnungsvortrag, um den Seminarteilnehmern auch bei dieser Gelegenheit wieder seine Ziele nahezubringen. „Die Auseinandersetzung des Unterzeichneten betraf die Ziele des Seminars und die für diese Ziele in Betracht kommenden literarischen und experimentellen Hilfsmittel“, schrieb Klein dazu lapidar ins Protokollbuch.[66] Seine allgemeinen Bestrebungen und die mit Hilfe der Göttinger Vereinigung von ihm initiierten Einrichtungen, insbesondere die Institute von Runge und Prandtl sowie die neue Modellversuchsanstalt, waren den Seminarteilnehmern wohlbekannt, sodass Klein darüber nicht viele Worte verlieren musste. Was die hydro- und aerodynamische Fachliteratur betraf, verwies Klein vor allem auf die einschlägigen

[64] Bericht Kleins an die Göttinger Vereinigung, 22. Februar 1908. AMPG, Abt. III, Rep. 61, Nr. 2331.

[65] Kleins Notizen zu „Hydrodynamisches Seminar 1907/08“, Blatt 1. SUB, Handschriften, Cod. Ms. F. Klein 20F.

[66] Siehe Teil II, Kap. 1.

Artikel im Mechanikband der Enzyklopädie[67] und auf das Standardwerk zu Hydrodynamik von Horace Lamb, dessen deutsche Übersetzung gerade erschienen war und an der er selbst beratend mitgewirkt hatte.[68] Bei den experimentellen Hilfsmitteln dachte er an den „hydraulischen Versuchsapparat", den „aerodynamischen Rundlauf" und an die „Widerstandsversuche am Modell", die Prandtl und Fuhrmann kurz zuvor mit dem Saugrohr begonnen hatten und demnächst im Windkanal der neuen Modellversuchsanstalt in größerem Maßstab durchführen würden.[69]

Auch der zweite Seminartermin diente noch der allgemeinen Orientierung. Kleins Mitveranstalter, Runge, Prandtl und Wiechert, traten dem Protokollbuch zufolge nicht als Referenten auf. Stattdessen präsentierte Klein selbst nun den Plan, wie er sich den Ablauf des Seminars vorstellte.[70] Damit rückten auch die hydrodynamischen Teilgebiete ins Zentrum, die er den Seminarteilnehmern als Vortragsthemen zuwies. Dies ist Gegenstand des folgenden Kapitels.

---

67 Love, 1901b,a; Finsterwalder, 1902; Forchheimer, 1905; Kriloff u. Müller, 1907.

68 Lamb, 1906, 1907.

69 Kleins Notizen zu „Hydrodynamisches Seminar 1907/08", Blatt 3. SUB, Handschriften, Cod. Ms. F. Klein 20F.

70 Siehe Teil II, Kap. 2.

2 Die Seminarthemen

Nach der Darstellung der Kleinschen Bestrebungen, die den Hintergrund für das Hydrodynamikseminar im Wintersemester 1907/08 bildeten, bedürfen auch die im Seminar behandelten Themen einer historischen Annäherung. In seiner ersten Konzeption unterschied Klein vier Themengruppen. Die erste charakterisierte er durch ihre Nähe zur „klassischen Hydrodynamik“; dazu zählte er „Potentialbewegung“, „Wirbeltheorie“, „Strahlentheorie von Helmholtz-Kirchhoff bis Levi-Civitá“ und „Turbulenz“. Der zweiten Themengruppe gab er die Überschrift „Das Schiff auf dem Wasser“; hierunter fielen „Schiffsschwingungen“, „Schiffswellen, auch im Kanal“, „Schiffswirbel (Kielwasser)“, wobei er an die „Prandtlsche Theorie“ dachte, „Propeller = Ruder, Räder, Schrauben“ und „Steuern“. Einen weiteren Themenkomplex nannte er „Wasser und Luft (inkompressibel)“. Dazu rechnete er „Windwellen“ und „Segeln“, einschließlich einer „Exkursion nach Bremen zu Lloyd“. Die vierte Problemgruppe betraf die Aeronautik („Der Motorballon und der Drachenflieger“). Hier sollte im Seminar geklärt werden, ob es bereits „Fortschritte über den Finsterwaldschen Artikel hinaus“ gab; außerdem sollten „Ergebnisse der Göttinger Versuchstation“ und „überhaupt Luftbewegung, insbesondere Meteorologie!“ zur Sprache kommen.[1] Vor allem die ersten beiden Problemgruppen finden sich in den letztendlich für das Seminar im Wintersemester 1907/08 ausgewählten Themen wieder.[2] Themen der dritten und vierten Gruppe wurden Gegenstand des folgenden Seminars im Sommersemester 1908.[3]

---

[1] Kleins Notizen zu „Hydrodynamisches Seminar 1907/08“, Blatt 1. SUB, Handschriften, Cod. Ms. F. Klein 20F.

[2] Siehe Teil II, Abb. 1.1.

[3] http://www.uni-math.gwdg.de/aufzeichnungen/klein-scans/klein/V27-1907-1909/V27-p384_high.jpg.

2.1 Potentialbewegung

In seiner Hydrodynamikvorlesung vom Wintersemester 1899/1900 hatte Klein die „sog. Potentialbewegung“ definiert als „Bewegung, der ein Skalar – das Potential – in der Weise zu Grunde liegt, dass die Geschwindigkeitskomponenten die partiellen Differentialquotienten des Potentials sind.“ [4] In der Hydrodynamik wurde diese Skalarfunktion, die jedem Punkt im Raum einen Zahlenwert zuweist, als „Geschwindigkeitspotential“ bezeichnet – eine Benennung, die vermutlich auf Hermann von Helmholtz zurückgeht: [5]

> Es sind bisher Integrale der hydrodynamischen Gleichungen fast nur unter der Voraussetzung gesucht worden, dass die rechtwinkligen Komponenten der Geschwindigkeit jedes Wasserteilchens gleich gesetzt werden können den nach den entsprechenden Richtungen genommenen Differentialquotienten einer bestimmten Funktion, welche wir das Geschwindigkeitspotential nennen wollen.

Aber der Potentialbegriff und die darauf begründete Theorie sind viel älter. [6] Ihre Grundlagen wurden im 18. Jahrhundert zuerst im Zusammenhang mit der Newtonschen Gravitationstheorie gelegt, dann insbesondere von Carl Friedrich Gauß auf den Magnetismus ausgeweitet und schließlich für die Elektrodynamik weiter entwickelt. [7] Aus Sicht der Mathematik gründete sich die Potentialtheorie – unabhängig von ihrer jeweiligen physikalischen Anwendung – auf einer nach Pierre-Simon Laplace bzw. Siméon Denis Poisson benannten partiellen Differentialgleichung. Sofern eine skalare Funktion dieser Gleichung genügt, können daraus mit dem Instrumentarium der Potentialtheorie gerichtete Kräfte, Felder oder – wie in der Hydrodynamik – Geschwindigkeiten berechnet werden. Die Potentialtheorie wurde als grundlegend für so viele Anwendungen erachtet, dass ihr in den Mathematikbänden der *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* ein eigener Artikel gewidmet wurde. [8]

Physikalisch handelt es sich bei allen Fällen, die mit der Potentialtheorie behandelt werden, um konservative Systeme, d. h. ein Probekörper darf beim Durchlaufen eines geschlossenen Weges keine Energie verlieren. Die Potentialbewegung in der Hydrodynamik ist auf reibungsfreie (ideale) wir-

---

[4] Wieghardt-Ausarbeitung, S. 61.

[5] Helmholtz, 1858, S. 25.

[6] Bacharach, 1883.

[7] Archibald, 2014.

[8] Burkhardt u. Meyer, 1900.

belfreie Strömungen begrenzt. Die aus einem Geschwindigkeitspotential ableitbare Strömungsgeschwindigkeit $\vec{v}(\vec{r})$ muss die Forderung erfüllen:

$$\oint_S \vec{v}(\vec{r})\, d\vec{s} = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \nabla \times \vec{v}(\vec{r}) = 0\,.$$

Dann gilt $\vec{v}(\vec{r}) = \nabla\varphi(\vec{r})$, bzw. bei kartesischen Koordinaten $v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $v_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$. Verschiedene Strömungen können dann ausgehend von dem jeweiligen skalaren Potential $\varphi(x, y, z)$ analysiert werden.

Unter diesem Gesichtspunkt hatte Klein schon bei seiner Hydrodynamikvorlesung im Wintersemester 1899/1900 seine Studenten zuerst mit den Potentialströmungen vertraut gemacht. Damit einher gingen allgemeinere Ausführungen über „Vektorentheorie“, „Skalarfelder“ und „Vektorfelder“ – eine Herangehensweise, die für Kleins stark physikalisch motivierte Methodik spricht: „Auf die Vorstellung eines Vektorfeldes, die sich in der Mechanik der Kontinua geradezu aufdrängt, führen uns schon unsere soeben erledigten Potentialbetrachtungen,“ so lesen wir in der Vorlesungsmitschrift. Da sich jedem Aufpunkt eine durch einen Vektor charakterisierte Kraft oder – bei einer Strömung – eine Geschwindigkeit zuordnen ließ, folgte daraus: „Die Gesamtheit der Aufpunkte ist dann eben ein Vektorfeld.“ [9]

Auch im Hydrodynamikseminar 1907/08 galten die ersten Seminarvorträge der Potentialbewegung. Gleich im ersten Vortrag über „stetige“ Potentialbewegungen wurde z. B. auf eine „elegante Methode“ hingewiesen, die sich aus der Funktionentheorie durch Einführen eines komplexen Geschwindigkeitspotentials für die Berechnung ebener Strömungen ergab. [10] Im darauffolgenden Seminarvortrag wurde die „unstetige Potentialbewegung“ in den Blick genommen. Dabei ging es um Strömungen, die sich von Begrenzungsflächen ablösen. Helmholtz hatte 1868 in einer Arbeit „Über diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen“ gezeigt, dass auch solche Strömungen als Potentialbewegung mit dem Instrumentarium der Funktionentheorie (konforme Abbildung) behandelt werden können. [11] Nur ein Jahr später hatte Gustav Kirchhoff mit einem Beitrag „Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen“ die Helmholtzsche Methode wesent-

---

[9] Wieghardt-Ausarbeitung, S. 26. Um 1900 wurde andererseits noch heftig über die Vereinheitlichung bei der Vektorrechnung gestritten, siehe dazu Reich, 1996.

[11] Helmholtz, 1868. Zur Entwicklung der Helmholtzschen Vorstellung von Diskontinuitätsflächen siehe Darrigol, 2005, Kap. 4.3.

lich erweitert.[12] Die nach dieser Methode berechneten Beispiele zeigten, dass die Annahme einer „Potentialbewegung“ nicht unter dem Stigma des „d'Alembertschen Paradox“ (wonach ein mit konstanter Geschwindigkeit durch eine reibungsfreie Flüssigkeit bewegter Körper keinen Widerstand erfährt) leiden musste und – zumindest für ebene Strömungen – durchaus realistische Ergebnisse liefern konnte. In einem Nachtrag dieses Seminarvortrags wurde am Beispiel des Widerstands eines schief gestellten Bretts in einer Strömung gezeigt, dass damit eine Alternative zu dem Ergebnis der Newtonschen Strömungstheorie existierte, deren Ergebnis auf der (inzwischen überholten) Vorstellung stoßender Teilchen beruhte.[13]

2.2 Wirbelbewegung

Das Konzept der diskontinuierlichen Flüssigkeitsbewegung bildete auch eine Brücke zur Wirbelbewegung, denn die Trennungsfläche, entlang derer Potentialbewegungen unstetig aneinander grenzten, konnte nach Helmholtz „mathematisch gerade so behandelt werden, als wäre sie eine Wirbelfläche, das heißt, als wäre sie mit Wirbelfäden von unendlich geringer Masse, aber endlichem Drehungsmoment kontinuierlich belegt.“[14] Für die Theorie solcher Wirbelfäden hatte Helmholtz schon zehn Jahre vorher mit seiner Arbeit „Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen“ die Grundlage gelegt.[15] Die Wirbelbewegung war ebenso wie die Potentialbewegung nicht auf die Hydrodynamik begrenzt. Schon Euler habe gezeigt, so eröffnete Helmholtz seine Abhandlung, „dass es doch auch Fälle von Flüssigkeitsbewegung gibt, in denen kein Geschwindigkeitspotential existiert, z. B. die Drehung einer Flüssigkeit um eine Achse mit gleicher Winkelgeschwindigkeit aller Teilchen.“[16] In diese Kategorie gehörte, so Helmholtz, auch das Magnetfeld um einen stromdurchflossenen Draht. Die Wirbel-

[12] Kirchhoff, 1869.

[13] Teil II, Kap. 4.

[14] Helmholtz, 1868, S. 220.

[15] Helmholtz definierte darin Wirbellinien als „Linien, welche durch die Flüssigkeitsmasse so gezogen sind, dass ihre Richtung überall mit der Richtung der augenblicklichen Rotationsaxe der in ihnen liegenden Wasserteilchen zusammentrifft.“ Im Unterschied dazu bezeichnete er mit Wirbelfäden „Teile der Wassermasse, welche man dadurch aus ihr herausschneidet, dass man durch alle Punkte des Umfanges eines unendlich kleinen Flächenelementes die entsprechenden Wirbellinien construirt.“ Helmholtz, 1858, S. 26. Zur Entstehung der Helmholtzschen Wirbeltheorie siehe Darrigol, 2005, Kap. 4.2.

[16] Helmholtz, 1858, S. 25.

bewegung war also insbesondere für die Elektrodynamik, die im letzten Drittel des 19. Jahrhunderts an die vorderste Forschungsfront der Physik rückte, von besonderem theoretischem Interesse.

Nach Helmholtz machten auch James Clerk Maxwell, William Thomson (alias Lord Kelvin) und andere die Wirbelbewegung zum Gegenstand eingehender Untersuchungen.[17] Da Wirbel in einem als ideales Fluid gedachten Äther nach den Helmholtzschen Wirbelsätzen unzerstörbar sein sollten, lag auch die Vorstellung nicht fern, dass die kleinsten Materieteilchen, die Atome, aus Ringwirbeln bestehen könnten. Maxwell verschaffte dieser, von Kelvin weiter entwickelten Idee in der *Encyclopaedia Brittanica* ein breites Forum.[18] Mit dem „Wirbelatom" wurde die hydrodynamische Theorie der Wirbelbewegung im letzten Drittel des 19. Jahrhunderts zur „theory of everything".[19]

Auch für die Göttinger Physiker war die Wirbelbewegung ein interessantes Forschungsfeld. Eduard Riecke, der seit 1881 dem Institut für Experimentalphysik an der Göttinger Universität vorstand, hatte 1888 „Beiträge zur Hydrodynamik" veröffentlicht, mit denen er vor allem die „Strahl- und Wirbelbildung" ins Visier nahm.[20] Die Motivation dafür stammte zum einen aus der Faszination, mit einfachen Experimenten die Wirbelbildung sichtbar zu machen,[21] zum anderen aus der Analogie zu elektrodynamischen Vorgängen, denen ansonsten Rieckes erstes Forscherinteresse galt. Ein Jahr zuvor hatte Riecke auch theoretische Abhandlungen über die Beziehungen zwischen Hydrodynamik und Elektrodynamik veröffentlicht.[22] Auch Woldemar Voigt, Rieckes Kollege im Institut für theoretische Physik, hatte der Hydrodynamik mehrfach Tribut gezollt.[23] Allerdings stand dabei eher der virtuose Umgang mit funktionentheoretischen Methoden und weniger die Physik im Vordergrund.

Auch für Klein war die Hydrodynamik à la Helmholtz und Kirchhoff als Anwendungsfall funktionentheoretischer Methoden von Interes-

---

17 Buchwald, 1985; Siegel, 1991. Zu Kelvins Wirbelvorstellung siehe insbesondere Smith u. Wise, 1989, Kap. 12.

18 Maxwell, 1878.

19 Kragh, 2002.

20 Riecke, 1888.

21 Riecke verwies dazu auf einen bereits von dem Tübinger Physiker Friedrich Eduard Reusch 1860 konstruierten Apparat zur Erzeugung von Wirbelringen in Wasser (siehe dazu Reusch, 1860).

22 Riecke, 1887a,b.

23 Voigt, 1885, 1891a,b, 1892.

se. Hinzu kam – insbesondere bei der Wirbeltheorie – die Beziehung zur Topologie.[24] „Immer, wenn wir die hydrodynamischen Vorgänge in einem bestimmten Flüssigkeitsquantum betrachten, müssen wir die Flüssigkeitsquanta unterscheiden nach dem Zusammenhange der Raumstücke, die von ihnen erfüllt werden“, so machte er in seiner Hydrodynamikvorlesung im Wintersemester 1899/1900 bei der Wirbelbewegung auf diesen Bezug aufmerksam. Bei einfach-zusammenhängenden Raumstücken ließen sich geschlossene Kurven immer auf einen Punkt zusammenziehen, bei mehrfach-zusammenhängenden Räumen nicht. Dies war für die Berechnung der Zirkulation (bei der entlang geschlossener Kurven integriert wird) von zentraler Bedeutung.[25]

Als Klein im November 1907 den Plan des Hydrodynamikseminars vorstellte, nannte er nach der Potentialbewegung auch die Wirbelbewegung wieder als ein wichtiges Seminarthema. Allerdings rückte er jetzt weniger die mathematischen Aspekte in den Mittelpunkt, sondern betonte vielmehr die Diskrepanz zwischen Theorie und Praxis. „Wie weit sind diese speziellen Beispiele für die bei beliebigen Wirbeln stattfindenden Verhältnisse demonstrativ?“, fragte er sich und die Seminarteilnehmer mit Blick auf die von Maxwell und Riecke behandelten Fälle von Wirbelbewegungen.[26]

Da es sich bei den theoretisch behandelten Wirbeln immer um Wirbel in einer idealen Strömung handelte, stellte sich in Bezug auf die realen Wirbel in Flüssigkeiten sofort die Frage nach dem Einfluss der Reibung. Dessen ungeachtet hatte Helmholtz am Ende seiner Abhandlung über die Wirbelbewegungen deren Realitätsbezug herausgestellt:[27]

> Ich bemerke noch, dass man diese Bewegungen der kreisförmigen Wirbelringe in der Natur leicht studieren kann, indem man eine halb eingetauchte Kreisscheibe, oder die ungefähr halbkreisförmig begrenzte Spitze eines Löffels schnell eine kurze Strecke längs der Oberfläche der Flüssigkeit hinführt, und dann schnell herauszieht. Es bleiben dann halbe Wirbelringe in der Flüssigkeit zurück, deren Achse in der freien Oberfläche liegt.

[24] Epple, 1998.

[25] Wieghardt-Ausarbeitung, S. 175ff. und S. 366ff.

[26] Siehe Teil II, Kap. 2.

[27] Helmholtz, 1858, S. 55.

Stand diese Aussage nicht im Widerspruch zu dem von Helmholtz selbst aufgestellten Satz, wonach in einem idealen Fluid die Zahl der Wirbel erhalten bleibt? Wo vorher kein Wirbel war, durfte auch nach dem Löffeleinsatz keiner sein, und wenn doch, dann weil man es in der Realität eben immer mit Reibung zu tun hat? Dieselben Fragen standen auch im Zentrum des Seminarvortrags über die Wirbelbewegung. Es bestünde durchaus „die Möglichkeit, in einer reibungslosen Flüssigkeit Wirbel zu erzeugen“, führte der Referent aus; am Ende des Seminarvortrags wurden „Experimente in gefärbtem Wasser angestellt, indem Wirbel auf die pag. 21/22 näher erläuterte Weise hervorgerufen werden (Kaffeelöffelexperiment von Helmholtz.)“ [28] Das Kaffeelöffelexperiment wurde gleichsam zum Symbol für den Realitätsbezug der Theorie idealer Fluide. „Über die Bildung von Wirbeln in reibungslosen Flüssigkeiten“, so überschrieb Klein zwei Jahre später einen kurzen Aufsatz in der *Zeitschrift für Mathematik und Physik*. [29] Auch danach blieb das Kaffeelöffelexperiment ein viel diskutiertes Beispiel für die mit der Wirbelbewegung verbundenen Fragen. [30]

2.3 Wellen

Ein weiteres Thema der klassischen Hydrodynamik betraf die Bewegung von Wellen auf einer Wasseroberfläche. Im Unterschied zu den meisten anderen Strömungserscheinungen konnte die Theorie idealer Fluide bei den Wasserwellen, was die Übereinstimmung mit Beobachtungen und Experimenten betrifft, schon in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts große Erfolge verbuchen. [31] 1847 hatte George Gabriel Stokes mit einer Abhandlung „On the theory of oscillatory waves“ auf diesem Gebiet einen bedeutenden Markstein gesetzt, dem er danach noch einige Ergänzungen folgen ließ. [32] In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts galt das Interesse immer mehr den Schiffswellen. Die Theorie dazu hatte William Thomson (Lord Kelvin) entwickelt, nachdem ein „Committee on designs of ships for war“ der britischen Admiralität ihn mit der Untersuchung solcher Probleme beauftragt hatte. Kelvin hatte darüber auch mit Stokes als der Autorität in Sachen Wasserwellen korrespondiert: „The longest waves that have be-

---

[28] Teil II, Kap. 5.

[29] Klein, 1910.

[30] Saffman, 1992, Kap. 6.

[31] Siehe dazu Craik, 2004 und Darrigol, 2005, Kap. 2.

[32] Craik, 2005 und Darrigol, 2005, Kap. 2.4.

en observed?“, wollte er zum Beispiel wissen, „their length from crest to crest? – and height from hollow to crest?“.[33]

Klein hatte der Theorie der Wasserwellen schon bei seiner Hydrodynamikvorlesung 1899/1900 breiten Raum eingeräumt.[34] Auch dabei galt den Schiffswellen ein besonderes Interesse. Klein zeigte den Studenten, dass auch ein so komplexes Phänomen wie die Ausbreitung der Wellen vom Bug eines Schiffes mit einfachen Formeln beschrieben werden kann. Theorie und Praxis waren bei diesen Fragen aber nicht zu trennen. Das V-förmige Wellenmuster mit dem theoretisch exakt berechneten Öffnungswinkel provozierte ein weiteres Mal die in der Hydrodynamik immer wieder gestellte Frage, „ob das mit der Beobachtung wirklich stimmt?“[35]

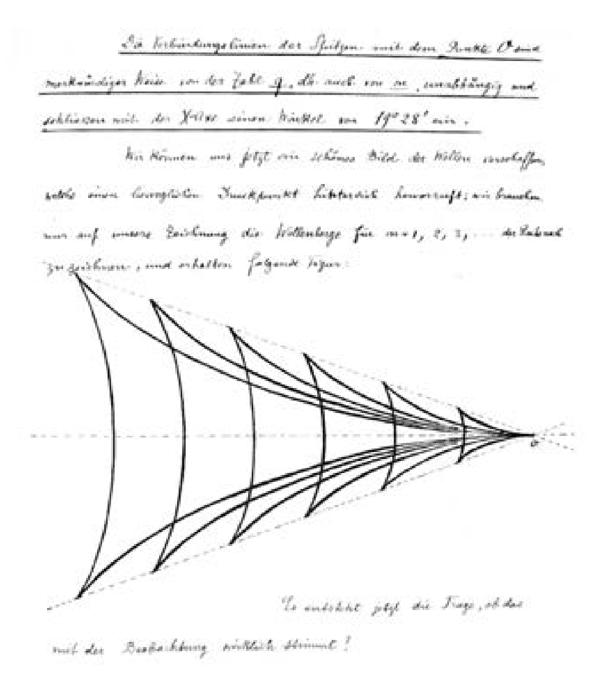


Abb. 2.1: Seite aus Wieghardts Ausarbeitung der Kleinschen Hydrodynamikvorlesung 1899/1900 mit dem Muster der Schiffswellen, die vom Bug und Heck eines Schiffes ausgehen (Quelle: Wieghardt-Ausarbeitung, S. 503 [UAG]).

---

[33] Zitiert in Darrigol, 2005, S. 88.

[34] Wieghardt-Ausarbeitung, S. 427–507.

[35] Wieghardt-Ausarbeitung, S. 503.

Im Seminar über Schiffsbewegung, das Kleins Vorlesung im Wintersemester 1899/1900 begleitete, war die Theorie der Schiffswellen ebenfalls ein Thema. Hier findet sich bereits ein Hinweis darauf, dass das V-förmige Wellenmuster auch für den Schiffswiderstand eine Rolle spielt, denn wie vom Bug geht auch vom Schiffsheck ein ähnliches Wellensystem aus. „Dieses Wellensystem interferiert mit dem ersten und bewirkt so ein abwechselndes Wachsen und Abnehmen des Widerstandes, den das Schiff im Wasser findet.“ Näheres dazu könne man in einem Aufsatz von Froude „On Ship Resistance“ nachlesen.[36]

Vier Jahre später standen die Wasserwellen auch auf dem Programm des Kleinschen Seminars über „Ausgewählte Kapitel der Hydrodynamik“ im Wintersemester 1903/04.[37] Der Referent dafür war Max Laue, der nach seiner Promotion bei Max Planck in Berlin einige Semester in Göttingen verbrachte, bevor er wieder nach Berlin ging, um sich als Assistent von Planck mit den physikalisch zweifellos interessanteren Fragen der neuen Relativitätstheorie zu beschäftigen. Mit Blick auf Laues spätere Karriere als Pionier der Röntgenbeugung ist sein Referat aber durchaus erwähnenswert, denn die dabei erworbene Vertrautheit mit Wellen war sicher hilfreich, um später auch den Röntgenwellen – bei allen Unterschieden zur Physik der Wasserwellen – ihre Geheimnisse zu entlocken.

Mindestens ebenso bemerkenswert ist aber auch in diesem Seminar wieder das Bemühen, die Reichweite der Theorie bei der Annäherung an die Praxis auszuloten. Obwohl es sich bei den Wellen nach Kleins Kategorisierung noch um „gut definierte Probleme“ handelte, die weitgehend mit den Methoden der Potentialtheorie behandelt werden konnten, gab es bei der mathematischen Behandlung große Schwierigkeiten, „weil es sich nicht um feste Grenzflächen mit linearen Grenzbedingungen handelt.“ Aber es gab auch einen großen Fundus an empirischen Daten, und „an diese Beobachtungen anknüpfend“, so Klein, könne man auch die Theorie weiter entwickeln.[38] Diesem Diktum folgend ging es bei Laues Vortrag nicht nur um die Wellentheorie, wie sie etwa in der letzten Auflage von Lambs *Hydrodynamics* dargestellt wurde,[39] sondern auch um die

[36] Seminar über Schiffsbewegung, Protokollbuch Nr. 15, S. 366. Froude, 1894.

[37] 9. Vortrag: „Über Wellen“, Seminar 20, S. 66–73.

[38] Kleins Protokoll über seinen „Bericht über den seitherigen Verlauf des Seminars (vor der math. Gesellschaft am 9. Februar 1904), Seminar 20, S. 135.

[39] Lamb, 1895, Kap. VIII.

eher technisch ausgerichtete Wellenlehre eines Henry Bazin.[40] Ingenieurliteratur werde leider in den physikalischen Standardwerken zur Hydrodynamik „nur wenig berücksichtigt und fehlt auf den Universitätsbibliotheken durchweg“, kritisierte Klein, und auch im Hydrodynamikartikel von Love in dem von ihm selbst betreuten Mechanikband der *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* seien „die wichtigen Experimentaluntersuchungen von *Bazin* ... nur mangelhaft berücksichtigt.“[41] Wie um dieses Manko noch stärker hervorzuheben, ließ Klein in einem weiteren an die Wellentheorie anschließenden Referat den Spezialfall des „Stauproblems“ näher untersuchen, bei dem Bazins Ergebnisse und andere Beobachtungen an verschiedenen Kanälen und Flüssen zu Ehren kamen.[42]

Auch im Hydrodynamikseminar des Wintersemesters 1907/08 gehörten die Wasserwellen wieder zu den obligatorischen Vortragsthemen, wobei nun aber die Schiffswellen in den Brennpunkt rückten. Zwar machte Klein im Anschluss an die Potential- und Wirbelbewegung auch die Wellenbewegung zum Thema eines eigenen Referats, doch dabei ging es im wesentlichen nur um ebene „Stokes'sche Wellen“ und die Darlegung der Grundbegriffe.[43] Den Schiffswellen wurden zwei Sitzungen gewidmet;[44] der dabei auftretende „Wellenwiderstand“ wurde im letzten Vortrag des Seminars „Über Schiffswiderstand in unbegrenztem Wasser“ diskutiert.[45] Das Thema der Wellen erscheint im ersten Referat noch als Teilgebiet der „klassischen“ Hydrodynamik, während es in den letzten Referaten der „Hydrodynamik des Schiffes“ untergeordnet und damit mehr als technikwissenschaftliches Thema verstanden wird (siehe Kap. 2.6).

2.4 Das Grenzschichtkonzept

Bei allen bislang beschriebenen Seminarthemen handelte es sich um die Hydrodynamik idealer, das heißt reibungsloser Fluide. Nur unter der Voraussetzung der Reibungslosigkeit war eine Flüssigkeitsbewegung als Potential-, Wirbel- oder Wellenbewegung einer mathematischen Analyse zugänglich. Zwar wusste man schon in den 1820er Jahren, wie die

[40] Bazin, 1865.

[41] Kleins Protokoll über seinen „Bericht über den seitherigen Verlauf des Seminars (vor der math. Gesellschaft am 9. Februar 1904), Seminar 20, S. 134.

[42] 10. Vortrag: „Stauproblem“, Seminar 20, S. 74–89.

[43] Teil II, Kap. 6.

[45] Teil II, Kap. 13.

Eulerschen Bewegungsgleichungen idealer Fluide durch Hinzufügen eines Reibungsterms für reale Fluide zu erweitern waren, aber die so entstandenen Navier-Stokes-Gleichungen spielten für die Berechnung spezifischer Reibungsprobleme lange Zeit keine Rolle. Gotthilf Hagen (1839) und Jean Louis Poiseuille (1840) hatten ihre Formeln über die laminare Rohrströmung nicht aus den Navier-Stokes-Gleichungen abgeleitet, sondern aus experimentellen Messreihen erschlossen; der Zusammenhang mit den Navier-Stokes-Gleichungen stellte sich erst später heraus.[46]

Nur wenige Reibungsprobleme ließen sich überhaupt wie das „Hagen-Poiseuillesche Gesetz" theoretisch ableiten. Ein anderes Beispiel war das „Stokes'sche Gesetz" für die Bewegung einer Kugel durch eine zähe Flüssigkeit. Aber schon bei der Berechnung des Widerstands einer längs angeströmten Platte versagte die Theorie, auch wenn es sich nur um eine laminare Strömung handelte. Ganz zu schweigen von turbulenten Strömungen. „Bei breiteren Rohrquerschnitten und größeren Geschwindigkeiten stimmt die Sache garnicht", so kam Klein in seiner Hydrodynamikvorlesung 1899/1900 auf das Versagen des Hagen-Poiseuilleschen Gesetzes beim Übergang zur Turbulenz zu sprechen, „und dementsprechend haben auch die Techniker ihre empirischen Formeln aufgestellt."[47]

Als sich Prandtl erstmals mit Strömungen befasste, befand er sich in der Rolle des Technikers. 1900 wurde er als Ingenieur bei MAN mit dem Entwurf einer Rohrleitungsanlage zum Absaugen von Sägespänen beauftragt.[48] Dabei sollten die Rohre so dimensioniert werden, dass ein möglichst geringer Druckverlust auftrat. Wie Prandtl herausfand, erwiesen sich die Zusammenfügungen von Rohren und die konischen Verbindungsglieder zwischen weiten und engen Rohren als die kritischen Teile der Anlage. Erweiterte sich der Rohrquerschnitt auf zu kurzem Weg, kam es zur Strömungsablösung – und dann ließ sich bei anschließender Querschnittsverringerung der ursprüngliche Druck nicht mehr wiedergewinnen.[49]

Als Professor an der technischen Hochschule in Hannover begann Prandtl, dem Problem der Strömungsablösung nun wissenschaftlich auf den Grund zu gehen. Sein für die Theorie entscheidender Grundgedanke dabei war, dass sich bei Fluiden mit geringer Viskosität (wie Luft oder

[46] Darrigol, 2005, Kap. 3.7.

[47] Wieghardt-Ausarbeitung, S. 322–323. Zur Turbulenz siehe Kap. 2.5.

[48] Eckert, 2017b, Kap. 2.1.

[49] Eckert, 2017b, Kap. 2.3.

Wasser) der Reibungseinfluss nur ganz nahe an der Wandoberfläche bemerkbar macht. Durch die Reibung an der Wand, so argumentierte er, verringert sich die Strömungsgeschwindigkeit in unmittelbarer Wandnähe, bis es schließlich zu einer Rückströmung und damit zur Ablösung der Strömung von der Wand kommt. Um diesen Vorgang auch experimentell zu untersuchen, konstruierte Prandtl einen mit einem Zwischenboden versehenen Wasserbehälter, in dem er das Wasser mit einem kleinen Schaufelrad in Umlauf versetzen konnte (Abb. 2.2). An den auf dem Zwischenboden umströmten Gegenständen ließen sich dann die mit der Strömungsablösung einhergehenden „Bewegungsformen" beobachten – von regelmäßigen Wirbeln bis zur vollständigen turbulenten Verwirbelung.[50]

Im August 1904 präsentierte Prandtl seine Untersuchungen „Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung" beim III. Internationalen Mathematiker-Kongress in Heidelberg.[51] „Obwohl bei den technisch vorkommenden Flüssigkeitsbewegungen die Reibung im Inneren der Flüssigkeit eine geringfügige Rolle spielt, stimmt die Theorie der reibungslosen Flüssigkeit schlecht mit der Erfahrung." So beschrieb Prandtl in einer Zusammenfassung für das *Bulletin of the American Mathematical Society* seine Motivation. „Nimmt man die Reibungskonstante statt gleich Null als sehr klein an, so wird ihre Wirkung merklich, wo große Geschwindigkeitsunterschiede auftreten würden, also z. B. an den Wänden der festen Körper. Man kommt dem wirklichen Verhalten sehr nahe, wenn man längs der Wand die erste Ordnung der Reibungswirkung berücksichtigt, in der freien Flüssigkeit aber Reibungslosigkeit annimmt."[52]

Prandtls Heidelberger Vortrag ging als Auftakt der „Grenzschichttheorie" in die Wissenschaftsgeschichte ein. So plausibel dieses Konzept im Rückblick erscheint, im Jahr 1905 gab es dafür kaum stichhaltige Belege. Prandtls mathematische Ausführungen in Heidelberg beschränkten sich auf wenige rudimentäre Formeln, und auf den Fotos der umströmten Kör-

[50] Um diese Erscheinungen besser sichtbar zu machen und auch fotografisch festzuhalten, gab Prandtl dem Wasser Eisenglimmer bei. Das Material eignete sich so hervorragend zur Visualisierung von Wirbeln, dass er es auch dem Turbulenzreferenten Schwarzschild nach Göttingen schickte. Seiner „Turbulenzmasse" fügte er noch die Anleitung bei, wie man sie zubereiten sollte: „Rezept: Erst mit Wasser netzen, dann kneten, dann ganz allmählich verdünnen, bis die Suppe durchscheinend wird. Ein darin bewegter Löffel zeigt bereits famose Figuren." Prandtl an Schwarzschild, 2. Mai 1904. SUB, Handschriften, Cod. Ms. K. Schwarzschild 609.

[51] Prandtl, 1905a; siehe dazu Eckert, 2017b, Kap. 2.4.

[52] Prandtl an H. W. Tyler, undatiert [ca. 1904/05]. Cod. Ms. L. Prandtl 14, Bl. 42–43 (SUB); die englische Version ist abgedruckt in Wilson, 1905, S. 251.

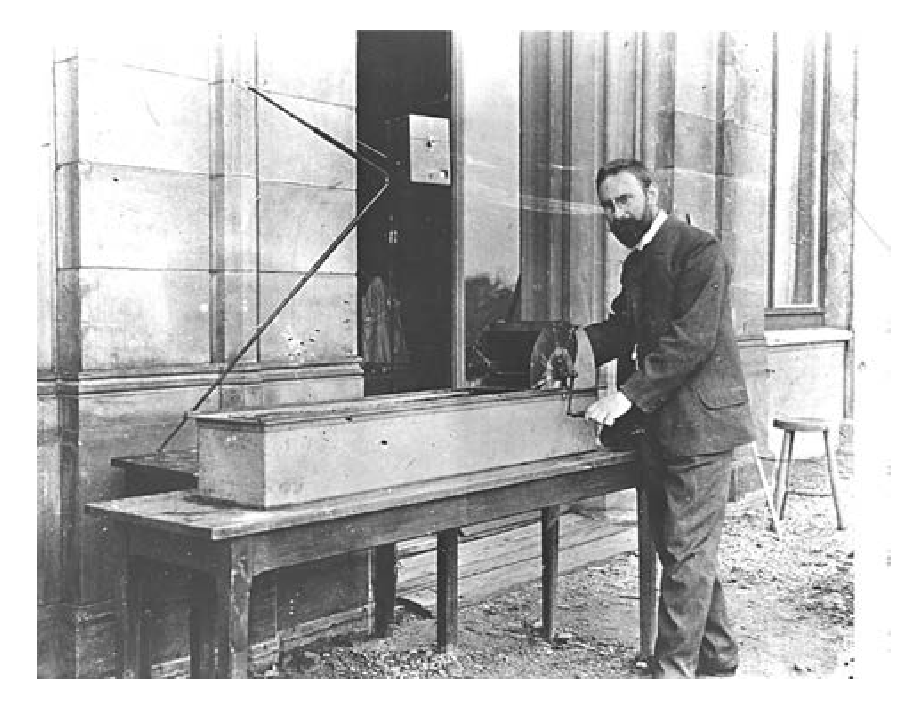


Abb. 2.2: Mit diesem an der technischen Hochschule in Hannover konstruierten Wasserkanal beobachtete und fotografierte Prandtl die Strömungsablösung und Verwirbelung hinter angeströmten Körpern. Die dabei entstandenen Aufnahmen präsentierte er im August 1904 auf dem III. Internationalen Mathematiker-Kongress im Rahmen seines Vortrags „Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung", mit dem er sein Grenzschichtkonzept publik machte (Quelle: DLR, Bildarchiv, Bildnr. GG-0010).

per war keine Spur von einer Grenzschicht zu erkennen. Das in einem Diagramm gezeigte Geschwindigkeitsprofil in der Grenzschicht an einer längs angeströmten Platte war nicht das Resultat einer mathematischen Berechnung, sondern ergab sich aus einer Mischung von Dimensionsanalyse und Plausibilitätsbetrachtungen.

Mit anderen Worten: Prandtl hatte mit seinem Grenzschichtvortrag ein Problemfeld abgesteckt, das Stoff für eine Fülle von experimentellen und theoretischen Forschungsarbeiten bot. Er überantwortete gleich seinem ersten Doktoranden Heinrich Blasius das Problem, die in seinem Heidelberger Vortrag ohne mathematische Analyse beschriebene laminare Grenzschichtströmung entlang einer ebenen Platte aus den hydrodynamischen

Grundgleichungen abzuleiten.[53] Blasius gelang dies, indem er die für die Grenzschicht angenommene partielle Differentialgleichung durch geschickte Variablensubstitution auf eine gewöhnliche Differentialgleichung reduzierte, die sich mit einem Reihenansatz näherungsweise lösen ließ. Die Durchführung beanspruchte immer noch mehrere Druckseiten. Sie erlaubte aber auch Ausblicke auf andere Anwendungen. Blasius demonstrierte damit nicht nur seinen virtuosen Umgang mit mathematischen Methoden, sondern auch das Potential des Grenzschichtkonzepts für die Behandlung von zuvor nicht lösbaren hydrodynamischen Problem. Mit seiner Doktorarbeit, die er mit der mündlichen Prüfung am 6. Juni 1907 erfolgreich abschloss, setzte er nach Prandtls Heidelberger Grenzschichtvortrag einen weiteren Markstein moderner Strömungsforschung.[54]

Es ist deshalb nicht verwunderlich, dass Klein der Grenzschichttheorie im hydrodynamischen Seminar des Wintersemesters 1907/08 einen besonderen Stellenwert zuerkannte. Prandtls Heidelbergvortrag und die Doktorarbeit von Blasius gaben den Vorträgen bei der 7. Sitzung über „Stationäre Strömung inkompressibler reibender Flüssigkeiten“ und bei der 8. und 9. Sitzung über „Grenzschichten und Ablösung von Wirbeln“ den wesentlichen Inhalt und die Richtung vor.[55] Blasius wäre für das zuletzt genannte Thema sicher als Referent prädestiniert gewesen, doch nach der gerade absolvierten Promotion stand ihm der Sinn schon nach einer neuen Herausforderung – und die fand sich beim Thema der „Turbulenten Strömungen“, für das Klein zwei Sitzungen vorsah.[56] Nach der Veröffentlichung von Hahn, Herglotz und Schwarzschild, die aus dem Seminar vom Wintersemester 1903/04 hervorgegangen war, betrachtete Klein dieses Thema noch lange nicht als erledigt. Gerade mit Blick auf die Verwissenschaftlichung der Ingenieurfächer gab es kein geeigneteres Thema. Am 16. Januar 1900 hatte er dies in seiner Hydrodynamikvorlesung unmissverständlich zum Ausdruck gebracht: „Die Tatsache, dass turbulen-

53 Vermutlich überließ er ihm dazu auch seine Aufzeichnungen, auf denen er seit 1903 seine eigenen diesbezüglichen Anstrengungen festgehalten hatte. Sie waren jedoch nicht so weit gediehen, dass er zum Beispiel die Proportionalitätskonstante für die Reibungskraft der längs angeströmten Platte berechnen konnte. Siehe dazu Eckert, 2017b, Kap. 2.3.

54 Blasius, 1907. Siehe dazu auch Hager, 2003.

55 Teil II, Kap. 7, 8, 9.

56 Teil II, Kap. 10.

te Bewegungen eintreten, bildet die Brücke zwischen der Hydrodynamik und der Hydraulik.“ [57]

2.5 Turbulenz

Schon bei der Potential- und Wirbelbewegung ging es Klein nicht um die bloße Wiedergabe der etablierten Theorien, so anspruchsvoll diese auch sein mochten, sondern um einen kritischen Vergleich mit realen Strömungen. Dies galt noch viel mehr für die Turbulenz. „Sind Rayleigh, Lorentz, Schwarzschild geradezu falsch?“, fragte er sich dazu mit Bezug auf die Diskussionen zu den Seminarvorträgen von Hahn, Herglotz und Schwarzschild über Turbulenz vom Wintersemester 1903/04, die Theorie über Strömungsinstabilität von Lord Rayleigh und die jüngste Arbeit von Hendrik Antoon Lorentz „Über die Entstehung turbulenter Flüssigkeitsbewegungen und über den Einfluss dieser Bewegungen bei der Strömung durch Röhren“. [58] Keine dieser Theorien konnte die kritische Geschwindigkeit für den Turbulenzumschlag oder das Widerstandsgesetz für turbulente Strömungen auch nur annähernd zutreffend beschreiben.

Dementsprechend versuchte sich Blasius in den beiden Turbulenzvorträgen des Hydrodynamikseminars 1907/08 nicht mehr wie Hahn, Herglotz und Schwarzschild vier Jahre zuvor an einer neuen Theorie, sondern bemühte sich um einen möglichst breit angelegten Überblick. [59] Danach kristallisierten sich zwei Problemkomplexe heraus: erstens, der Übergang von der laminaren zur turbulenten Strömung; und zweitens, die voll entwickelte Turbulenz. Für das erste Problemfeld sollte die Lösung in einer Erklärung der Instabilität der laminaren Strömung bestehen. Für das zweite Problemfeld präsentierte Blasius zuerst eine „hydraulische Beschreibung“ nach Joseph Boussinesq,[60] dann „hydrodynamische Ansätze“ nach dem Muster von Hahn, Herglotz und Schwarzschild. [61]

Beinahe gleichzeitig entwickelten 1907 und 1908, unabhängig voneinander, William McFadden Orr und Arnold Sommerfeld eine Methode, wo-

---

[57] Wieghardt-Ausarbeitung, S. 327.

[58] Kleins Notizen zu „Hydrodynamisches Seminar 1907/08“, Blatt 1. SUB, Handschriften, Cod. Ms. F. Klein 20F. Hahn u. a., 1904, Rayleigh, 1887, Lorentz, 1907. Zur Vorgeschichte siehe Darrigol, 2002.

[59] Teil II, Kap. 10.

[60] Boussinesq, 1877, 1897.

[61] Hahn u. a., 1904.

nach sich die Instabilität einer laminaren Strömung durch Überlagerung mit einer Störwelle als Lösung eines Eigenwertproblems darstellen ließ. Der „Orr-Sommerfeld-Ansatz“ erschien als Schlüssel bei der Suche nach einer kritischen Schwelle (Reynoldszahl) der Turbulenzentstehung. Das Scheitern dieser Versuche führte dazu, dass man darin bald das eigentliche „Turbulenzproblem“ sah.[62] Prandtl machte in den 1920er Jahren mit seinen Doktoranden diesen Problemkomplex zu einem Schwerpunkt seiner Turbulenzforschung und konnte schließlich beachtliche Erfolge dabei erzielen.[63] Allerdings beziehen sich diese Lösungen nach dem Orr-Sommerfeld-Ansatz nur auf Spezialfälle; es gibt bis heute keine allgemeine Theorie des Turbulenzumschlags. Ähnlich verhält es sich mit dem zweiten von Blasius charakterisierten Problemkomplex der voll ausgebildeten Turbulenz. Auch dabei konnte Prandtl in den 1920er Jahren mit seinem „Mischungsweg“-Ansatz, der auf der „hydraulischen Beschreibung“ von Boussinesq aufbaute, einen ersten Erfolg verbuchen. Aber auch in diesem Fall handelte es sich um eine Theorie, die sich nur auf Spezialfälle anwenden ließ. Eine aus den Grundgleichungen abgeleitete allgemeine „hydrodynamische“ Theorie der voll entwickelten Turbulenz ist auch im 21. Jahrhundert noch ein unerreichtes Wunschziel.[64]

Sucht man nach den Wurzeln der modernen Turbulenzforschung, die – zumindest was die deutschen Arbeiten dazu angeht – mit Prandtl und seinen Schülern ihren Anfang nahm,[65] so lassen sich die ersten Veröffentlichungen dazu in den 1920er Jahren verorten. Nimmt man unveröffentlichte Quellen hinzu, kann der Beginn auf den 6. März 1916 datiert werden, als Prandtl erstmals ein „Arbeitsprogramm zur Turbulenztheorie“ konzipierte. Darin unterschied er – wie Blasius in seinen Seminarvorträgen – die Programmpunkte „A. Entstehung der Turbulenz“ und „B. Fertige Turbulenz“, sodass die beiden Turbulenzvorträge von Blasius bei der 11. Sitzung am 29. Januar 1908 und der 12. Sitzung am 5. Februar 1908 wohl als der eigentliche Beginn der Prandtlschen Turbulenzforschung anzusehen sind.

[62] Eckert, 2010.

[63] Eckert, 2017a.

[64] Sonar, 2009.

[65] Bodenschatz u. Eckert, 2011, 2013.

2.6 Die Hydrodynamik des Schiffs

Im Protokollbuch Nr. 27 für das Seminar im Wintersemester 1907/08 lautete die vollständige Bezeichnung: „Hydrodynamisches Seminar, mit besonderer Berücksichtigung der Hydrodynamik eines Schiffes". Schon bei der Hydrodynamikvorlesung im Wintersemester 1899/1900 hatte Klein parallel dazu ein Seminar über „Schiffsbewegung" veranstaltet. Wie wichtig ihm diese Anwendung war, brachte er in seinen Notizen deutlich zum Ausdruck: „Wie kommt der Schiffswiderstand hervor? Theorie der Propeller. Ungemein aktuelles Interesse".[66] Folgerichtig widmete er diesen Themen die letzten fünf Seminarsitzungen, jeweils zwei über Schiffswellen[67] bzw. Schiffsschrauben[68] und eine über den Schiffswiderstand.[69]

Bei den Schiffswellen konnte der Referent an die früheren Vorlesungen und Seminare anknüpfen, bei denen dieses Thema eingehend behandelt worden war, von Kleins Hydrodynamikvorlesung 1899/1900, den einschlägigen Referaten im Seminar über „Schiffsbewegung" und im Hydrodynamikseminar 1903/04, bis hin zu der vorangegangenen Seminarsitzung vom Dezember 1907 über „Wellenbewegung".[70] Angesichts dieser Vorgeschichte konnte nun – nach einer Rekapitulation der Grundbegriffe, insbesondere der grundlegenden Unterscheidung von Phasen- und Gruppengeschwindigkeit – das Schwergewicht auf das „dreidimensionale Problem" gelegt werden, d. h. die von einem Schiff nach verschiedenen Richtungen über eine zweidimensional ausgedehnte Wasserfläche sich ausbreitenden Wellen. Die Pionierarbeiten dazu hatten William Froude und sein Sohn Robert Edmund Froude 1877 bzw. 1881 in den *Transactions of the Royal Institution of Naval Architects* veröffentlicht.[71] „The whole subject of naval dynamics, including valuable observations and suggestions regarding ship waves, was worked out with wonderful power by William Froude; and the investigations of the father were continued by his son, Edmund Froude, in the Government Experimental Works at Haslar, Gun

[66] Kleins Notizen zu „Hydrodynamisches Seminar 1907/08", Blatt 1. SUB, Handschriften, Cod. Ms. F. Klein 20F.

[67] Teil II, Kap. 11.

[68] Teil II, Kap. 12.

[69] Teil II, Kap. 13.

[70] Siehe dazu Kap. 2.3 und Teil II, Kap. 6.

[71] Froude, 1877, 1881.

Creek, Gosport." So hatte Lord Kelvin 1891 in einem Beitrag über Schiffswellen die Bedeutung dieser Arbeiten hervorgehoben.[72]

Die Froudes hatten sich in England als Ingenieure auf dem Gebiet der „naval architecture", wie die mit dem Schiffbau verbundene Technik dort bezeichnet wurde, einen Namen gemacht. Mit ihren vorwiegend experimentellen Untersuchungen wollten sie in erster Linie den Bestandteil des Schiffswiderstandes bestimmen, der mit der Wellenerzeugung einher geht. Dasselbe Ziel verfolgte auf einem rein theoretischen Weg der australische Mathematiker John Henry Michell.[73] Michells Theorie fand im Seminar große Beachtung.[74] Sie war nicht nur für eine numerische Berechnung des Wellenwiderstands brauchbar, sondern beschrieb auch das bislang unbekannte Phänomen, dass dieser Widerstandsanteil bei höheren Schiffsgeschwindigkeiten wieder abnimmt. „That the resistance is an oscillating function of the velocity has been experimentally found by Mr. W. Froude and his son, to whom also we owe the general explanation in terms of the interference of bow and stern waves", so hatte Michell auf die bereits von den Froudes erkannten Eigenschaften des Wellenwiderstands hingewiesen. „But the ultimate vanishing of the resistance has not, so far as I know, been anticipated."[75]

Beim nächsten, dem Schiffspropeller gewidmeten Seminarthema gab es jedoch von theoretischer Seite wenig zu berichten. Dem Thema zum Trotz („Theorie der Schiffspropeller") konnte der Referent nur auf Publikationen von Ingenieuren zurückgreifen, in denen aus zahlreichen experimentellen Messungen und Beobachtungen rudimentäre theoretische Schlüsse gezogen wurden.[76] Schon beim Widerstandsgesetz für eine schräg angeströmte Platte, das als Ausgangspunkt für eine Theorie der Schiffsschraube dienen sollte, gab es kein gesichertes Wissen. Das aus der Newtonschen Theorie abgeleitete Gesetz stimmte nicht mit der Erfahrung überein, und die aus Experimenten abgeleiteten Gesetze konnten nicht theoretisch begründet werden. Im Seminarvortrag ging es dementsprechend auch vorrangig um empirisch gesicherte Erkenntnisse. Dafür bot vor allem eine von William Frederick Durand 1898 veröffentlichte Mono-

[72] Thomson, 1891, S. 450–500, hier S. 479.
[73] Tuck, 1989.
[74] Teil II, Kap. 11.
[75] Michell, 1898.
[76] Teil II, Kap. 12.

graphie, die den Seminarteilnehmern zum Literaturstudium empfohlen wurde, reichlich Material.[77]

Was die Strömungsverhältnisse an den Schiffsschrauben angeht, die für die Propellerwirkung verantwortlich sind, wurde dafür erst 1918 mit der Prandtlschen Tragflügeltheorie die Grundlage geschaffen. Darauf konnte dann auch für Propeller unterschiedlichster Anwendungsarten – Flugzeugpropeller, Schiffsschrauben, Rotoren von Windkraftanlagen – die entsprechende Theorie entwickelt werden. Die moderne Propellertheorie wurde von Prandtls Assistenten an der Versuchsanstalt, Albert Betz, aufgestellt, der auch an der Entwicklung der Tragflügeltheorie entscheidend mitgewirkt hatte.[78] Dennoch wurden damit die älteren von dem schottischen Ingenieur William John Macquorn Rankine begründeten und dann von den beiden Froudes und anderen weiterentwickelten Vorstellungen nicht obsolet. Man habe „in der von Rankine begründeten Schraubenstrahltheorie eine der Wirklichkeit verhältnismäßig recht nahekommende Darstellung der Vorgänge", schrieb Betz 1921 in einem Aufsatz mit dem Titel „Die Vorgänge beim Schraubenpropeller"; er sah darin sogar „eine Art Vorläufer der modernen für Tragflügel entwickelten Theorie".[79]

Das Thema des letzten Seminarvortrags galt dem „Schiffswiderstand in unbegrenztem Wasser".[80] Der zuvor schon bei den Schiffswellen erörterte Wellenwiderstand macht nur einen Teil des Schiffswiderstands aus. Die anderen Widerstandsarten sind der „Formwiderstand", der sich als eine verwirbelte Strömung im Kielwasser des Schiffes bemerkbar macht, und der „Hautwiderstand", der von der Beschaffenheit der Schiffsoberfläche abhängt. Wie bei der Propellertheorie wurden auch diese beiden Widerstandsarten erst später dem Zugriff von Theorien zugänglich, soweit es die strömungsphysikalischen Ursachen angeht. Dies setzte insbesondere eine Theorie der turbulenten Grenzschicht voraus – und auch dabei spielten Prandtl und seine Schüler (vor allem Theodore von Kármán) wieder die Hauptrollen.[81] Umso erstaunlicher ist die schon lange vorher erreichte begriffliche und konzeptionelle Klärung dieser komplexen Thematik, wie sie auch in diesem Seminarbeitrag zutage tritt. Erneut wird darin die Rolle des empirischen Ingenieurwissens à la Froude und Durand deut-

---

[77] Durand, 1898.

[78] Betz, 1919. Zur Tragflügeltheorie siehe Rotta, 1990a, S. 188–193.

[79] Betz, 1921, S. 309.

[80] Teil II, Kap. 13.

[81] Eckert, 2017b, Kap. 3.7 und 6.8.

lich, deren Publikationen neben weiteren technischen Darstellungen zum Schiffbau wieder zu den Literaturempfehlungen zählten.

3 Die Seminarteilnehmer

Wer an einem Kleinschen Seminar teilnahm, sollte über profunde mathematische Kenntnisse verfügen und möglichst die einschlägigen Vorlesungen Kleins – sowie in diesem Fall auch seiner Mitveranstalter Runge und Prandtl (Wiecherts Mitwirkung ist an den Themen nicht erkennbar) – besucht haben. Beim Thema Hydrodynamik waren die mathematischen Anforderungen besonders hoch. Das zeigt schon ein Blick in Lambs *Hydrodynamik*, das Standardwerk dieses Faches; darüber hinaus sollten sich die Seminarteilnehmer mit der Hydrodynamik aber auch „in einer in den Lehrbüchern sich nicht vorfindenden anschaulichen Weise“ anfreunden.[1] Außerdem mussten sie die Bereitschaft mitbringen, sich wie bei der Schiffshydrodynamik mit Themen vertraut zu machen, die eher zum Kanon der Ingenieurfächer an technischen Hochschulen zählten. „Nur für ältere Leute“, so hatte Klein deshalb den Kreis der Seminarteilnehmer von vornherein auf Studenten höherer Semester, Doktoranden und Assistenten eingegrenzt.[2]

3.1 Manfred Jaeger

Der Referent des ersten Seminarvortrags über „Potentialbewegung idealer Flüssigkeiten (stetige)“[3] war Manfred Jaeger. Er wurde 1884 als Sohn eines Generaloberarztes in Ludwigsburg im Königreich Württemberg geboren. „Immer dem Wohnsitz der Eltern folgend“, so schrieb er in seinem Lebenslauf, hatte er seine Schulausbildung in Ulm, Stuttgart und Königsberg erhalten und dort am humanistischen Gymnasiums 1903 die Reifeprüfung abgelegt. Danach studierte er Mathematik und Naturwissenschaften an der Universität Straßburg und an der technischen Hochschule in Karls-

[1] Teil II, Kap. 2.

[2] Kleins Notizen zu „Hydrodynamisches Seminar 1907/08“, Blatt 1. SUB, Handschriften, Cod. Ms. F. Klein 20F.

[3] Teil II, Kap. 3.

ruhe, wo er 1905 in der Abteilung für Bau- und Ingenieurwesen die Vorprüfung ablegte, um dann an der Göttinger Universität sein Studium in den Fächern Mathematik und Physik fortzusetzen. Hier legte er im Januar 1909 die Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen „für reine Mathematik, angewandte Mathematik und Physik für die erste Stufe" ab und promovierte im Sommer 1909 bei Runge mit einer Dissertation über „Graphische Integrationen in der Hydrodynamik".[4]

Nach seinem Studium arbeitete Manfred Jaeger als „wissenschaftlicher Hilfsarbeiter" am Königlich-Preußischen Aeronautischen Observatorium in Lindenberg (bei Beeskow in Brandenburg) an „Anwendungen der Hydrodynamik auf meteorologische Probleme", wie eine 1913 von ihm publizierte Abhandlung in der Schriftenreihe des Observatoriums überschrieben war. Im Ersten Weltkrieg meldete er sich „als Beobachter und wissenschaftlicher Lehrer beim Freiwilligen Marinefliegerkorps in Johannisthal", wo er im Februar 1915 tödlich verunglückte.[5]

3.2 Theodore von Kármán

Den folgenden Vortrag „Über unstetige Potentialbewegung"[6] hielt der ungarische Gaststudent Theodore von Kármán. Er brachte es von allen Seminarteilnehmern später zu größtem Ansehen.[7]

Kármán wurde 1881 in Budapest geboren, wo er auch seine Schulbildung erfuhr und 1898 die Reifeprüfung ablegte. 1902 schloss er das Studium an der technischen Hochschule in Budapest mit dem Diplom als Maschineningenieur ab. Nach einer eineinhalbjährigen Praxiserfahrung im Konstruktionsbüro einer Maschinenfabrik verbrachte er drei Jahre als Assistent an der technischen Hochschule in Budapest, bevor er im Herbst 1906 nach Göttingen kam, „um meine Studien der theoretischen Richtung nach fortzusetzen".[8]

---

[4] Promotionszulassungen von Kandidaten mit dem Anfangsbuchstaben J (UAG, Phil.Prom. Spec.J.1).

[5] *Arbeiten des Königl. Preußischen Aeronautischen Observatoriums*, 1916, S. vii und Assmann, 1915, S. 273 und 282.

[6] Teil II, Kap. 4.

[7] Siehe Goldstein, 1966 und die autobiografische Darstellung von Kármán u. Edson, 1968, auf die sich, was Kármáns frühe Jahre in Göttingen betrifft, auch die später publizierten biografischen Darstellungen Hanle, 1982; Gorn, 1992; Nickelsen u. a., 2004 beziehen.

[8] Lebenslauf, verfasst im Juli 1908. Promotionszulassungen von Kandidaten mit dem Anfangsbuchstaben K (UAG, Phil.Prom.Spec.K.1).

Vor seinem Seminarvortrag hatte Kármán bereits drei Arbeiten auf dem Gebiet der technischen Mechanik publiziert, die letzte 1907 in der *Physikalischen Zeitschrift* „Über stationäre Wellen in Gasstrahlen“. 1908 promovierte er bei Prandtl – nicht über das Thema seines Seminarvortrags, sondern über „Die Knickfestigkeit gerader Stäbe“, ein klassisches Problem der Elastizitätstheorie, für die Kármán ebenso wie für die Strömungsmechanik ein besonderes Interesse entwickelte. Ein Jahre später wurde er Assistent am Prandtlschen Institut. „Herr v. Kármán ist zwar Ausländer, aber ohne Zweifel weitaus der geeignetste Kandidat für diese Stelle, der mir bekannt ist“, schrieb Prandtl an den Kurator der Universität Göttingen.[9] Dies bot Kármán die Gelegenheit, sich mit „Untersuchungen über die Bedingungen des Bruches und der plastischen Deformation, insbesondere bei quasiisotropen Körpern“ zu habilitieren und als Privatdozent an der Göttinger Universität die erste Stufe seiner akademischen Karriereleiter als Hochschullehrer zu erklimmen.

Mit Blick auf seinen Seminarvortrag verdient besonders eine Arbeit Erwähnung, die Kármán 1911/12 unter der Überschrift „Über den Mechanismus des Widerstandes, den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erfährt“ in den *Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften* veröffentlichte.[10] Darin berechnete er den Impulstransport von Wirbeln, die sich im Nachlauf eines angeströmten Zylinders von dessen Oberfläche ablösen und in einer alternierenden Wirbelreihe abströmen. Thematisch gehört dieser Fall eher zu der im folgenden Seminarvortrag behandelten Wirbelbewegung, doch Kármán machte in seinen einleitenden Bemerkungen auch deutlich, warum die in seinem Vortrag behandelte „von Helmholtz und Kirchhoff erfundene diskontinuierliche Potentialbewegung“ für diese Art von Widerstand nicht relevant war. „Namentlich fehlt in der Theorie vollkommen die Saugwirkung, die nach den Versuchen hinter dem Körper entsteht und die nach neueren Versuchen bei vielen Körperformen geradezu als maßgebend für die Größe des Widerstandes erscheint. Auch überzeugt man sich leicht, dass die Grundannahme der Theorie, dass die Bewegung in bezug auf ein mit dem Körper mitbewegtes Koordinatensystem stationär ist, der Wirklichkeit keineswegs entspricht. Hinter dem Körper entsteht kein ‚totes Wasser‘, welches mit dem Körper sich einfach

[9] Prandtl an Ernst Höpfner, 18. August 1909. Akten über die Besetzung und Verwaltung der Assistentenstellen der Abteilung für Technische Physik des Physikalischen Instituts bzw. des Instituts für Angewandte Mechanik, 1897–1933 (UAG, Kur. 1456).

[10] von Kármán, 1911, 1912.

hinziehen würde." Sätze wie diese charakterisieren eben jenes Spannungsverhältnis von Theorie und Praxis, das sich durch das ganze Hydrodynamikseminar wie ein roter Faden hindurchzog. Nach seinem Seminarvortrag über die unstetige Potentialbewegung war Kármán sehr bewusst, dass sich damit der Widerstand eines angeströmten Zylinders nicht berechnen ließ und man stattdessen die Wirbelbewegung in den Blick nehmen musste. Die Trennungsschichten der unstetigen Potentialbewegung würden nicht stabil bleiben. Da er das mathematisch zugängliche Terrain der idealen Strömung nicht verlassen wollte, konzentrierte er sich auf die „Anordnung isolierter Wirbelfäden", die er sich „etwa als Endprodukt der zerstörten labilen Trennungsschicht" vorstellte. Bei seiner Theorie ging es deshalb zuerst um „die einfachste stabile Anordnung von Wirbelfäden für das ebene Problem". Von da aus komme man „zu einer Bewegungsform, die der Wirklichkeit gut entspricht."[11] Diese Form der Wirbelanordnung (Abb. 3.1) ging als „Kármánsche Wirbelstraße" in die Geschichte ein.

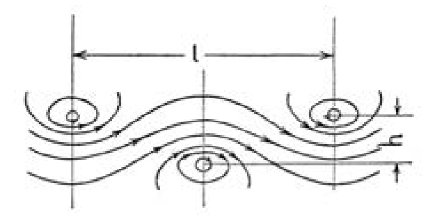


Abb. 3.1: Kármán berechnete 1911 die regelmäßige Anordnung von alternierenden Wirbelfäden hinter einem Hindernis. Aus dem mit den Wirbeln abströmenden Impuls ergibt sich der damit verbundene Strömungswiderstand (Quelle: von Kármán, 1911, S. 513).

Kármáns weitere Karriere führte ihn über die Technische Hochschule Aachen nach Pasadena, wo er in den 1930er Jahren als Direktor des Guggenheim Aeronautical Laboratory am California Institute of Technology (GALCIT) das nach der Göttinger Prandtl-Schule wohl bedeutendste Zentrum moderner Strömungsmechanik vor dem zweiten Weltkrieg aufbaute. Nach dem Krieg machte er sich als wissenschaftlicher Berater der U.S. Air Force und als Chairman der Advisory Group for Aeronautical Research and Development (AGARD) der NATO einen Namen. Er starb 1963.

[11] von Kármán, 1911, S. 510–511.

3.3 Karl Hiemenz

Wie sich Kármán erinnerte, hatte Prandtl „einen seiner Doktoranden, einen Mann namens Hiemenz“ damit beauftragt, den Druck an verschiedenen Punkten an der Oberfläche eines kreisrunden Zylinders in einer gleichförmigen Wasserströmung zu messen. Das war der Anstoß für die Theorie der „Kármánschen Wirbelstrasse“. Hiemenz habe nämlich – so Kármán – gefunden, dass der Druck am Zylinderrand immer schwankte. „So sehr er sich auch bemühte, er konnte diese Unregelmäßigkeit nicht beseitigen. Die Wasserströmung oszillierte immer ... Über das Wochenende wollte ich dem Grund für diese unregelmäßig oszillierende Strömung nachgehen ...“ [12]

Karl Hiemenz war im Hydrodynamikseminar der Referent „Über Wirbelbewegung“. [13] Er wurde 1885 in Worms am Rhein geboren, hatte 1903 in Darmstadt die Reifeprüfung abgelegt und dort an der technischen Hochschule auch sein Studium der Mathematik und Physik begonnen. Nach drei Semestern setzte er das Studium in Gießen, Göttingen und dann wieder in Gießen fort, wo er es 1906 mit dem Lehramtsexamen abschloss. Während seiner Göttinger Semester muss er Klein aufgefallen sein, denn im Herbst 1906 wurde er Kleins Assistent an der Sammlung mathematischer Instrumente und Modelle. [14] Dabei kam er auch mit Prandtl in Kontakt, der ihm an seinem Institut die Gelegenheit zur Promotion über „Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszylinder“ bot. [15]

Nach seiner Promotion wurde Hiemenz Assistent am physikalischen Institut der technischen Hochschule in Darmstadt und 1914 Mathematiklehrer an der Hamburger Ingenieurschule, die 1912 aus dem Zusammenschluss verschiedener in den 1890er Jahren gegründeten technischen Fachschulen hervorgegangen war („Höhere Schiffbauschule“, „Wagenbauschule“, „Höhere Schule für Elektrotechnik“, „Höhere Schule für

[12] von Kármán u. Edson, 1968, S. 76.

[13] Teil II, Kap. 5.

[14] Hiemenz, 1907.

[15] Hiemenz, 1911. Die Angaben zum Studium entstammen Hiemenz’ eigenen Lebenslauf, verfasst im Juni 1910, in den Promotionszulassungen von Kandidaten mit dem Anfangsbuchstaben H (UAG, Phil.Prom.Spec.H.3).

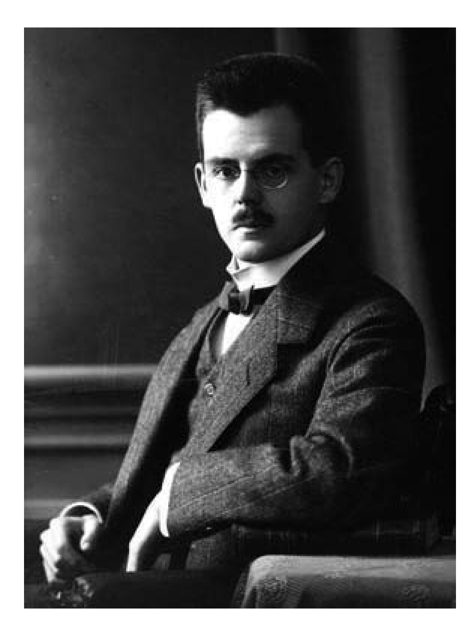


Abb. 3.2: Karl Hiemenz (1885–1973) (Quelle: Hager, 2009, S. 1091).

Schiffsmaschinenbau")[16] und der er bis zu seiner Pensionierung 1950 treu blieb. Er starb 1973 in Hamburg.[17]

3.4 Hans Schröder

Der Referent für das Thema „Wellenbewegung"[18] war Hans Adolf August Schröder. Er wurde 1887 in Erfurt geboren, wo er auch die Schulzeit mit der Reifeprüfung abschloss. 1905 kam er nach Göttingen, um dort Mathematik und Physik zu studieren. Ein halbes Jahr nach dem Hydrodynamikseminar absolvierte Schröder das Staatsexamen für das höhere Lehramt in Mathematik und Physik. 1908 war er Assistent bei Runge. Danach wechselte er an die technische Hochschule in Danzig, wo ihm Friedrich Schilling eine Assistentenstelle angeboten hatte. Schillings Hochschullaufbahn hatte ebenfalls in Göttingen begonnen: Er hatte 1893 bei Felix Klein promoviert und dort von 1899 bis 1904 als Extraordinarius das Fach der Darstel-

16 https://www.haw-hamburg.de/zeitleiste.html.

17 Hager, 2009, S. 1091.

18 Teil II, Kap. 6.

lenden Geometrie gelehrt und die Sammlung mathematischer Geräte betreut. Hans Schröder entwickelte sich in Danzig ebenfalls zum Fachmann auf dem Gebiet der Darstellenden Geometrie. Er wählte daraus auch das Thema seiner Doktorarbeit und promovierte 1913 mit einer Dissertation über „Die Zentralflächen der Paraboloide und Mittelpunktsflächen zweiten Grades“.[19] Wie sein drei Jahre älterer Seminarkollege Manfred Jaeger wurde auch er ein Opfer des Ersten Weltkriegs: er fiel im Oktober 1917.

3.5 Adolf Steichen

Das Thema „Stationäre Strömung inkompressibler reibender Flüssigkeiten“[20] wurde von Adolf Steichen behandelt. Steichen gehörte zu den älteren Seminarteilnehmern. Er wurde 1870 in einem Ort bei Echternach geboren und erhielt seine Schulausbildung in Echternach und dann am Gymnasium in Luxemburg, wo er 1891 die Reifeprüfung absolvierte. Danach studierte er in Luxemburg und Holland Philosophie und Theologie. Er trat dem Jesuitenorden bei, wo man ihn für den Einsatz in Indien empfahl und zunächst für ein Studienjahr nach Irland schickte. 1904 ging er nach England, um an der Universität Cambridge Mathematik und Physik zu studieren. Zum Wintersemester 1905/06 immatrikulierte er sich an der Göttinger Universität, wo er 1909 bei Prandtl mit einer Arbeit zur Gasdynamik – und ohne großen Erfolg – promovierte. In der Doktorprüfung erhielt er die Note „rite“, was zum Bestehen gerade ausreichte. Felix Klein schrieb in seinem Promotionsgutachten, Steichen sei „immer sehr fleissig gewesen, aber er denkt sehr langsam.“[21]

Danach folgte Steichen dem Plan seines Ordens und ging nach Bombay (seit 1996 Mumbai), um am Jesuitenkolleg St. Xaviers Mathematik und Physik zu unterrichten. 1927 kehrte er nach Deutschland zurück. Seine letzten Lebensjahre verbrachte er an der Philosophisch-Theologischen Lehranstalt Sankt Georgen bei Frankfurt. „Dort brauchte man einen Kosmologieprofessor, der die deutschen akademischen Grade hatte“, schrieb ein Ordensbruder in einem Nachruf auf Steichen. „Er war ein Mann von besonderem Gepräge, der seine Eigenarten hatte, ab und zu einmal als al-

[19] Schröder, 1913. Die biografischen Angaben entstammen dem darin enthaltenen Lebenslauf.

[20] Teil II, Kap. 7.

[21] Steichen, 1909. Die Angaben zum Studium entstammen Steichens Lebenslauf, verfasst im Mai 1909, in den Promotionszulassungen von Kandidaten mit dem Anfangsbuchstaben S (UAG, Phil.Prom.Spec.S.3).

ter Haudegen auftreten konnte, mit dem man Konflikte besser vermeiden sollte, aber für gewöhnlich sich als ruhigen, umgänglichen Menschen zeigte, der sein Körnchen Salz zur Unterhaltung beitrug, allen wohlgesinnt und von allen wohlgelitten war.“ Er starb 1935.[22]

3.6 Hugo Koch

Hugo Koch, der über „Grenzschichten und Ablösung von Wirbeln“[23] referierte, gehörte zu den jüngeren Seminarteilnehmern. Er wurde 1886 in Hamburg geboren und besuchte dort das renommierte Gymnasium Johanneum, wo er 1904 die Reifeprüfung ablegte. Danach ging er zum Studium der Mathematik und Naturwissenschaften nach Göttingen. Zum Zeitpunkt des Seminars war er noch Student im 7. Semester ohne Abschluss. Sein Interesse galt „hauptsächlich der angewandten Mathematik“, wie er in seinem Lebenslauf schrieb. Er beendete sein Studium im Sommer 1909 im Alter von 23 Jahren mit dem Staatsexamen für das höhere Lehramt in Mathematik und Physik und einer von Runge betreuten Promotion „Über die praktische Anwendung der Runge-Kuttaschen Methode zur numerischen Integration von Differentialgleichungen“.[24] Seine weitere Karriere verbrachte er als Gymnasiallehrer in Hamburg.[25]

3.7 Georg Fuhrmann

Die Fortsetzung des Kochschen Vortrags übernahm Georg Fuhrmann,[26] einer der erfahrensten Seminarteilnehmer. Er wurde 1883 in Hannover geboren und verbrachte dort auch seine gesamte Schulzeit bis zur Reifeprüfung im Jahr 1902. Anschließend studierte er an der technischen Hochschule in Hannover Elektrotechnik. Nach Abschluss der Diplomhauptprüfung kam er am 1. März 1907 nach Göttingen, wo ihm Prandtl eine Assistentenstelle angeboten hatte. Damit wurde er auch mit den Vorarbeiten für die neue Modellversuchsanstalt und deren Einrichtung beauftragt. Fuhrmanns Hauptarbeit während der Zeit des Seminars und in den Jah-

---

[22] Gierens, 1935.

[23] Teil II, Kap. 8.

[24] Promotionszulassungen von Kandidaten mit dem Anfangsbuchstaben K (UAG, Phil.Prom. Spec.K.2).

[25] https://www.mathematik.de/kurzbiographien?view=form&chronoform=Kurzbiographien&event=submit.

[26] Teil II, Kap. 9.



Abb. 3.3: Georg Fuhrmann (1883–1914) (Quelle: Prandtl, 1914, S. 902).

ren danach bestand in der Beschaffung von Messinstrumenten für die geplanten Versuche und, als die Modellversuchsanstalt 1908 ihren Betrieb aufnahm, in der Durchführung von Windkanalmessungen an Luftschiffmodellen. Ein Nebenprodukt dieser Tätigkeit war seine 1912 abgeschlossene Dissertation über „Theoretische und experimentelle Untersuchungen an Ballonmodellen“.[27] Danach wurde Fuhrmann Leiter der physikalischen Abteilung der in Berlin-Adlershof errichteten Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt.

Wie seine Seminar-Kommilitonen Jaeger und Schröder wurde auch Fuhrmann ein Opfer des Ersten Weltkriegs. Er habe, schrieb Prandtl in einem Nachruf, „am 4. September [1914] in der Gegend von Antwerpen den Tod auf dem Schlachtfelde gefunden.“[28]

---

[27] Promotionszulassungen von Kandidaten mit dem Anfangsbuchstaben F UAG, Phil.Prom. Spec.F.2.

[28] Prandtl, 1914. Zu Fuhrmanns Rolle beim Aufbau der Modellversuchsanstalt siehe Rotta, 1990a, S. 30–33 und S. 69–73.

3.8 Heinrich Blasius

Heinrich Blasius stand in doppelter Hinsicht im Zentrum des Hydrodynamikseminars: Zum einen als Referent für „Turbulente Strömungen“,[29] deren Verständnis von Klein als grundlegend für den Brückenschlag zur technischen Praxis erachtet wurde; zum anderen wegen seiner Dissertation über „Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung“, die den Seminarteilnehmern neben Prandtls Heidelberger Grenzschichtbeitrag zur Lektüre empfohlen wurde.[30]

Blasius wurde 1883 in Berlin geboren, wo er 1902 am Kgl. Kaiserin Auguste Gymnasium das Zeugnis der Reife erhielt. Zum Studium der Physik und Mathematik ging er nach Marburg und Göttingen, wo er 1907 bei Prandtl promovierte. Die „sehr schwierigen und mühevollen Rechnungen“, die Blasius bei der Durchführung der Grenzschichttheorie bewältigen musste, habe er – so Prandtl in seinem Dissertationsgutachten – mit „großem mathematischen Geschick durchgeführt; die Arbeit verdient daher großes Lob“.[31] Prandtl bot ihm danach eine von der Göttinger Vereinigung finanzierte Hilfsassistentenstelle an, die Blasius für die gesamte Dauer des Hydrodynamikseminars noch an sein Institut band.[32] Auch Wiechert hätte ihn gerne als Assistenten angestellt, aber Blasius fühlte sich den Prandtlschen Forschungsgebieten enger verbunden. Dies bewies er auch in seinen Briefen an Prandtl, nachdem er im Juli 1908 in Berlin eine Stelle an der Preußischen Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau angenommen hatte. „Man lernt doch eine ganze Menge Physik dabei, wenn man die ohne jegliche Mathematik verfertigten Berichte und Abhandlungen über Wasserbauten, Geschiebebewegungen u. dergl. liest“, so reagierte er auf den Wechsel aus dem akademischen Göttinger Umfeld in die technische Praxis.[33]

Die Konfrontation mit der Praxis hielt Blasius nicht davon ab, sich weiter mit hydrodynamischer Forschung zu befassen. Er bekundete mit einer

---

29 Teil II, Kap. 10.

30 Siehe Kap. 2.4 und 2.5.

31 Promotionszulassungen von Kandidaten mit dem Anfangsbuchstaben B UAG, Phil.Prom. Spec.B.2.

32 Prandtl an den Kurator der Göttinger Universität (Ernst Höpfner), 29. Oktober 1907 und 3. April 1908. Akten über die Besetzung und Verwaltung der Assistentenstellen der Abteilung für Technische Physik des Physikalischen Instituts bzw. des Instituts für Angewandte Mechanik, 1897–1933 (UAG, Kur. 1456).

33 Blasius an Prandtl, 29. Juli 1908. GOAR 3684.

Reihe von wissenschaftlichen Publikationen, dass die mit dem Hydrodynamikseminar von Klein und Prandtl ausgestreute Saat bei ihm zu keimen begann.[34] Seine Tätigkeit an der Berliner Versuchsanstalt erwies sich auch nicht als ein Hindernis für eine universitäre Karriere, wie die Möglichkeit einer Berufung an die technische Hochschule in Hannover zeigt. Dass daraus nichts wurde, hängt eher mit Blasius' Befremden über das Gebaren der Preußischen Ministerialbürokratie zusammen, als mit einer Abneigung gegen eine Hochschullaufbahn.[35] Im Sommer 1912 ging er – wie nach ihm Hiemenz[36] – als Lehrer für Mathematik an die Ingenieurschule Hamburg. Wie Hiemenz hielt auch Blasius dieser Schule zeitlebens die Treue. „Heinrich Blasius war als Lehrer eine Legende, verehrt und geschätzt von seinen Studenten", bescheinigte ihm das aus der Ingenieurschule hervorgegangene Department Maschinenbau und Produktion an der Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg.[37] Blasius starb 1970.

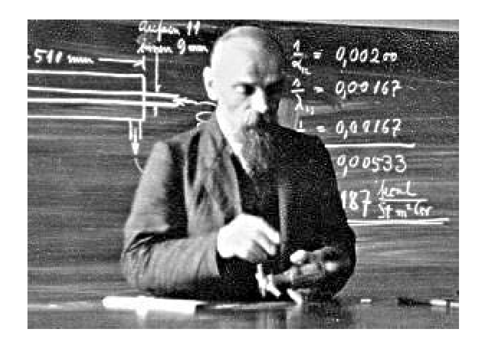


Abb. 3.4: Heinrich Blasius (1883–1970) (Quelle: http://www.mp.haw-hamburg.de/EhemalProfs/Dr__Heinrich_Blasius/dr__heinrich_blasius.html).

3.9 Ernst Hellinger

Von allen Seminarteilnehmern stand Ernst Hellinger der Mathematik am nächsten – näher jedenfalls als dies das Thema seines Referats „Über Schiffswellen"[38] vermuten lässt. Hellinger wurde 1883 in Striegau in Schle-

[34] Hager, 2003.

[35] Blasius an Prandtl, 9. April 1912. DLR, GOAR 3684.

[36] Siehe Kap. 3.3.

[37] http://www.mp.haw-hamburg.de/Blasius/vitaT3.php.

[38] Teil II, Kap. 11.



Abb. 3.5: Ernst Hellinger (1883–1950) (Quelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:ErnstHellinger_MFP.jpg).

sien geboren. 1902 erhielt er vom Kgl. König-Wilhelms-Gymnasium in Breslau das Reifezeugnis. Danach ging er zum Mathematikstudium zuerst nach Heidelberg, dann 1904 nach Göttingen, wo er 1907 bei Hilbert mit einer Dissertation über „Die Orthogonalinvarianten quadratischer Formen von unendlich vielen Variablen“ mit dem Prädikat „summa cum laude, opus eximium“ promovierte.[39] Ein Jahr zuvor hatte er zusammen mit Otto Toeplitz, der kurz darauf Privatdozent bei Hilbert wurde, in den *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* einen Beitrag über die „Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen“ veröffentlicht. Hellinger blieb bis 1909 als Assistent in Göttingen, wo er unter anderem Ausarbeitungen von Hilberts Vorlesungen anfertigte. Dennoch blieb sein Vortrag im Kleinschen Hydrodynamikseminar kein einmaliger Ausflug ins Reich der Mechanik, wie seine Abhandlung über „Allgemeine Ansätze der Mechanik der Kontinua“ zeigt, die 1913 im dem von Klein be-

[39] Promotionszulassungen von Kandidaten mit dem Anfangsbuchstaben H (UAG, Phil.Prom. Spec.H.1).

treuten Mechanikband der *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* erschien.

Hellingers weitere Karrierestationen führten ihn nach einigen Jahren als Privatdozent in Marburg 1914 an die neue Universität Frankfurt, wo er bis auf die Unterbrechung des Ersten Weltkriegs bis 1936 in einem Kreis von bedeutenden Mathematikern lehrte und forschte. 1939 emigrierte er in die USA, nachdem er 1936 von seinem Universitätslehrstuhl vertrieben und nach den Pogromen gegen Juden im November 1938 („Reichskristallnacht“) einige Wochen im Konzentrationslager Dachau eingesperrt worden war.[40] Hellinger starb 1950 in Chicago.

3.10 Reinhold Rüdenberg

Für Reinhold Rüdenberg war der Gegenstand seines Seminarvortrags über die „Theorie der Schiffspropeller“[41] ebenfalls untypisch für die im Verlauf seiner späteren Karriere behandelten Themen. Er war 1883 in Hannover geboren worden und hatte dort an der technischen Hochschule im Jahr 1901 begonnen, Maschinenbau und Elektrotechnik zu studieren. Im Sommer 1905 beteiligte er sich in Göttingen an einem von Klein in Zusammenarbeit mit Prandtl, Runge und Simon veranstalteten Seminar über Elektrotechnik.[42]

1906 beendete er sein Studium mit einer Dissertation über die „Energie der Wirbelströme in elektrischen Bremsen und Dynamomaschinen“. Prandtl war vermutlich schon während seiner Zeit als Professor in Hannover auf Rüdenberg aufmerksam geworden, denn er bot ihm 1906 die Assistentenstelle an seinem Institut in Göttingen an und sorgte 1907 dafür, dass Rüdenberg noch ein weiteres Jahr sein Assistent blieb.[43] Das bedeutete jedoch nicht, dass Rüdenberg sein Forschungsgebiet wechseln musste. Wie Prandtl 1908 in einem Bericht über die Arbeiten seines Instituts an die Göttinger Vereinigung erwähnte, seien im vergangenen Jahr neben den Arbeiten auf dem Gebiet der technischen Mechanik auch die „vom Verein deutscher Ingenieure unterstützten Untersuchungen des bisherigen Assi-

---

[40] Siegel, 1965, S. 469; siehe auch Siegmund-Schultze, 2009, S. 348.

[41] Teil II, Kap. 12.

[42] Tobies, 2014.

[43] Prandtl an den Kurator (Ernst Höpfner), 12. Februar 1906 und 18. Februar 1907. Akten über die Besetzung und Verwaltung der Assistentenstellen der Abteilung für Technische Physik des Physikalischen Instituts bzw. des Instituts für Angewandte Mechanik, 1897–1933 (UAG, Kur. 1456).

stenten Herrn Dr. Ing. R. Rüdenberg über magnetische Hysteresis" zu erwähnen, „die dieser selbständig im Institut ausgeführt hat."[44]

Nach seiner Göttinger Assistentenzeit ging Rüdenberg in die Industrie. 1908 wurde er bei den Siemens-Schuckert-Werken zuerst „Berechnungsingenieur", dann Sachverständiger in der Patentabteilung des Siemens-Konzerns. Daneben habilitierte er sich an der Technischen Hochschule in Charlottenburg, so dass ihm auch eine akademische Laufbahn weiter offen stand. Vorerst gab er jedoch der Ingenieurskarriere den Vorzug. 1923 wurde er „Chefelektriker" und Leiter der neugegründeten Wissenschaftlichen Abteilung der Siemens-Schuckert-Werke, 1926 übernahm er auch die Leitung der Abteilung Hochspannung. Ein Jahr später sorgte er als Honorarprofessor für Starkstrom- und Hochspannungstechnik an der Technischen Hochschule Charlottenburg, und ab 1929 auch als Gastprofessor am Massachusetts Institute of Technology in Cambridge (USA) dafür, dass die industriellen Erfahrungen auch in die Ingenieursausbildung Eingang fanden. Anfang der 1930er Jahre machte er sich auch um die Entwicklung des bei Siemens entwickelten Elektronenmikroskops verdient.

Nach den 1935 erlassenen Nürnberger Rassegesetzen konnte Rüdenberg seine Karriere in Deutschland nicht fortsetzen. Er wählte deshalb den Weg in die Emigration, zuerst nach England als „Consulting Engineer" in den Research Laboratories der General Electric Company Ltd. in London-Wembley, dann als Professor an der Harvard University in Cambridge, USA, wo er bis zu seiner Pensionierung das Department for Electrical Engineering leitete. Rüdenberg starb 1961 in Boston.[45]

---

[44] Bericht Prandtls an die Göttinger Vereinigung, 22. Februar 1908 (AMPG, Abt. III, Rep. 61, Nr. 2331).

[45] Schoen, 2005.

3.11 Aladár Visnya

Aladár Visnya war nach Adolf Steichen der älteste Teilnehmer des Seminars. Er wurde 1878 geboren und hatte nach einem abgeschlossenem Studium der Mathematik und Physik an der Universität Budapest in Ungarn schon als Gymnasiallehrer gearbeitet und mathematische Arbeiten publiziert. Auch für ihn blieb die Beschäftigung mit seinem Vortragsthema „Über Schiffswiderstand in unbegrenztem Wasser“ [46] ein kurzfristiger Ausflug in ein später nicht mehr betretenes Arbeitsgebiet. Zwar lieferte er im folgenden Sommersemester noch einen Nachtrag (dasselbe gilt auch für Rüdenberg über die Theorie der Schiffspropeller), [47] doch dann folgte sein Karriereweg anderen Bahnen. 1909 kehrte Visnya nach Budapest zurück, um wieder als Lehrer zu arbeiten. Später machte er sich als Museumsgründer und Entomologe einen Namen. Er starb 1959. [48]



Abb. 3.6: Aladár Visnya (1878–1959) (Quelle: Vig, 2014, S. 56).

[46] Teil II, Kap. 13.

[47] http://www.uni-math.gwdg.de/aufzeichnungen/klein-scans/klein/V27-1907-1909/V27-p384_high.jpg.

[48] Vig, 2003, 2014.

II Die Seminarvorträge

Editorische Grundsätze

Die Vortragsausarbeitungen wurden von den Seminarteilnehmern selbst handschriftlich in das Protokollbuch eingetragen. Sie werden im folgenden weitgehend originalgetreu transkribiert. Die Kommentierung einzelner Passagen erfolgt in Form von Fußnoten und wird im wesentlichen auf bibliografische Angaben beschränkt. Außerdem werden der leichteren Lesbarkeit wegen folgende Anpassungen vorgenommen:

- Die Überschriften über den Kapiteln 1–3 wurden ergänzt; die übrigen Kapitelüberschriften entstammen dem Manuskript.
- Überschriften innerhalb eines Seminarprotokolls (im Original meist durch Unterstreichung gekennzeichnet) werden **fett** gesetzt.
- Hervorhebungen (im Original meist ebenfalls durch Unterstreichungen gekennzeichnet) werden *kursiv* gesetzt.
- Die Seitenzahlen des Seminarprotokolls (im Original am oberen Seitenrand in der Mitte) werden in der Randspalte bei jedem Seitenwechsel in kleinen Ziffern als Marginalien gesetzt.
- Abgekürzte Wörter werden bis auf die sehr häufig gebrauchten Abkürzungen (wie z. B., u. a., d. h. etc.) ausgeschrieben (etwa: Okt. = Oktober).
- Schreibfehler und falsche oder fehlende Interpunktion werden ohne Kennzeichnung korrigiert, wobei auch Angleichungen an die heutige Rechtschreibung (etwa: daß = dass) vorgenommen werden.
- Wo es inhaltlich geboten erscheint, werden Absätze eingefügt (im Original ist dies oft durch Platzmangel unterblieben). Längere Formeln werden frei gestellt, auch wenn sie im Original in den Text integriert sind.
- Fußnoten im Original werden an der entsprechenden Stelle in eckigen Klammern in den Text eingefügt, um eine Verwechslung mit den editorischen Fußnoten zu vermeiden.
- Skizzen werden als Ausschnitte aus den Originalscans übernommen und an der entsprechenden Stelle in die Transkription eingefügt.
- Wo die Entzifferung der Handschrift nicht gelang, wurden die entsprechenden Passagen mit Fragezeichen in eckigen Klammern gekennzeichnet. In diesen Fällen sollten die Scans der Originalprotokolle (http://www.uni-math.gwdg.de/aufzeichnungen/klein-scans/klein/V27-1907-1909/V27-1907-1909.html) zurate gezogen werden.

Hydrodynamisches Seminar

1

mit besonderer Berücksichtigung der Hydrodynamik des Schiffes.

Winter 1907–1908

abgehalten von Klein, Prandtl, Runge und Wiechert.

1 Ziele des Seminars

Erstes Seminar. Mittwoch 30. Oktober 1907.

3

Die Auseinandersetzung des Unterzeichneten betraf die Ziele des Seminars und die für diese Ziele in Betracht kommenden literarischen und experimentellen Hilfsmittel. [1]

Die ersten Vorträge sollen einfache Fragen aus der Dynamik der *reibungsfreien* Flüssigkeiten in möglichst anschaulicher Form vorführen, beziehungsweise durch einfache Experimente einer Kontrolle unterwerfen.

Klein.

---

[1] Siehe dazu Teil I, Kap. 1.6.

Inhaltsverzeichnis.

Wintersemester 1907-08. p.

Abb. 1.1: Inhaltsverzeichnis des Hydrodynamikseminars in Felix Kleins Handschrift (Quelle: Protokoll, S. 382).

2 Plan des Seminars

Zweite Sitzung am Mittwoch 6. November 1907.

4

Der Unterzeichnete hat 1899–1900 eine hydrodynamische Vorlesung (nebst Seminar) gehalten, welche ähnliche Ziele verfolgte, wie das diesmalige Seminar, nur dass damals alle Hilfsmittel, über die wir jetzt erfreulicherweise verfügen, noch fehlten. Die Ausarbeitung der Vorlesung hat s. Z. *Wieghardt* besorgt, im Seminar war *C. Müller* Mitglied, woran die weitere Entwicklung, insbesondere auch der mathematischen Enzyklopädie angeknüpft hat. [1]

Im Anschluss an diese Ausarbeitung erörtert der Vortragende einige elementare Verhältnisse der klassischen (reibungslosen) Hydrodynamik in einer in den Lehrbüchern sich nicht vorfindenden anschaulichen Weise.

1. Kinematik der Flüssigkeiten. Eine Potentialbewegung, [2] die für das Zeitelement *dt* keine Drehung der Flüssigkeitselemente liefert, ergibt für endliche Zeit sehr wohl eine Drehung. Grund: Die rotationsfreien Affinitäten bilden keine „Gruppe“. [3]

5

2. Differentialgleichungen der Bewegung. Vergleich mit der Bewegung einer sich drängenden Menschenmenge. Die 7 allgemeinen Integrale. Benutzung zur Fixierung der quantitativen Verhältnisse solcher Flüssigkeitsbewegungen, deren allgemeiner Charakter uns aus dem Experiment bekannt ist. Die vena contracta im Borda’schen Falle. [4]

---

[1] Siehe dazu Teil I, Kap. 1.1.

[2] Zum Begriff der Potentialbewegung siehe Teil I, Kap. 2.1.

[3] Das bedeutet: Eine aus zwei nacheinander ausgeführten Transformationen zusammengesetzte Transformation gehört nicht mehr zur selben Mannigfaltigkeit der rotationsfreien affinen Transformationen. Zum Begriff der Affinität siehe z. B. Klein, 1925, Teil II, Kap. 1. Zur „Gruppentheorie als geometrisches Einteilungsprinzip“ siehe Fano, 1907. Diese Betrachtungsweise, die auf Kleins „Erlanger Programm“ zurückgeht, wurde in den Seminarvorträgen über Potentialbewegung (Kap. 3 und 4) jedoch nicht weiter verfolgt.

[4] Vgl. dazu die Wieghardt-Ausarbeitung, S. 159f, sowie Lamb, 1895, § 75.

3. Kugel in ∞ Wassermasse gleichförmig fortschreitend (stetige Potentialbewegung). Bahnkurven der einzelnen Wasserteilchen.[5]

4. Wirbel und Wirbel*körper* (siehe Maxwell, sowie Riecke in den Göttinger Nachrichten von 1888).[6] Schilderung der Wirbelkörper (d. h. der mitgeführten, um die Wirbelfäden zirkulierenden Wassermassen) im Falle zweier paralleler geradliniger entgegengesetzter Wirbelfäden und im Falle von Helmholtzwirbeln verschiedener
6 Querschnitte.[7] Wie weit sind diese speziellen Beispiele für die bei beliebigen Wirbeln stattfindenden Verhältnisse demonstrativ?

Klein.

[5] Vgl. dazu die Wieghardt-Ausarbeitung, S. 224ff. sowie Lamb, 1895, § 91.

[6] Maxwell, 1878; Riecke, 1888.

[7] Siehe dazu Kap. 5.

3 Potentialbewegung idealer Flüssigkeiten (stetige)

3te Sitzung am 13. November 1907.

7

Der Unterzeichnete spricht über Potentialbewegung einer Flüssigkeit, in der feste Körper ruhen oder sich bewegen.

Das Potential einer Flüssigkeitsbewegung stellt sich physikalisch dar als der impulsive Druck, der aus der Ruhe die betreffende Bewegung erzeugen würde. Seine Dimension ist $[\varphi] = \lambda^2\tau^{-1}$.

Aus den „Eulerschen Bewegungsgleichungen“:

„substantieller Differentialquotient“

$$\frac{DU}{Dt} = X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

ergibt sich bei Annahme eines Potentials als Integral die Druckgleichung oder Bernoullische Gleichung

$$E = \rho\{\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}q^2\} + \Omega + p = \psi(t)\,.$$

Sie besagt u. a., dass die Bewegung stationär ist, wenn die Energie (incl. Druck) gleichmäßig verteilt ist im Raum der Flüssigkeit. Der Geschwindigkeitsvektor an einem jeden Punkte ändert sich durch fortwährendes Hinzutreten des Vektors grad Edt. Wo die Geschwindigkeit groß ist, ist ceteris paribus der Druck kleiner, was sich in einer Saugwirkung wie in einem Einsinken der Oberfläche bemerkbar macht.

Befinden sich ein oder mehrere Körper in der Flüssigkeit, so ist das Potential φ nach den Greenschen Sätzen bestimmt durch die gegebenen kinematischen Bedingungen, dass nämlich sein Differentialquotient genommen nach der Oberflächennormalen gleich ist der Geschwindigkeit des Oberflächenteiles senkrecht zu sich selbst und dass dieser Differentialquotient im Unendlichen bestimmte Werte annimmt. Die Oberflächenbedingungen können in vielen Fällen ersetzt werden durch die Annahme geeignet verteilter Quellen und Senken; man nennt sie die Bilder der Oberfläche. Die Superposition von deren Potential zu dem Potential

8

der ohne den Körper bestehenden Flüssigkeitsbewegung soll in den Punkten der Oberfläche die genannten kinematischen Bedingungen ergeben.

Eine elegante Methode ist für die ebene Flüssigkeitsströmung (u, v) anwendbar.[1] Die Funktionen $\varphi = \int udx + vdy$ und $\psi = \int udy - vdx$ stellen die Längs- und Querströmung eines Weges dar und sind von dessen Verlauf unabhängig, so dass die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}$$

und

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

erfüllt sind und sich $w = \varphi + i\psi$ als eine Funktion von $z = x + iy$ darstellt. Es bilden daher die Kurven $\varphi = const.$ und $\psi = const.$ ein System von orthogonalen Kurven. [Einschub: Die Verzweigungspunkte der Riemannschen Fläche sind die Punkte, wo sich der Stromfaden teilt. — Quellen und Senken sind singuläre Punkte. 28. VII. 08. Jaeger] Die Verzweigungspunkte der Riemannschen Fläche sind entweder Wirbelpunkte oder Quellen beziehungsweise Senken und müssen ausgeschlossen werden.[2] Die Funktion φ kann eventuell durch Bestimmung der Koeffizienten der Fourierschen Reihe oder eventuell graphisch durch Einzeichnen eines quadratischen Kurven-Netzes bestimmt werden. Experimentell sind die Resultate von Hele-Shaw geprüft worden. Als Kriterium der Brauchbarkeit einer Theorie darf nicht eine einzelne Versuchsreihe angesehen werden. Es kommt vielmehr darauf an, ob bei wachsender Annäherung der Versuchsbedingungen an die
9 Voraussetzungen der Theorie der Effekt sich unter *allen* Umständen dem erwarteten nähert und vielleicht beliebig weit nähert. (Vergleich mit einer unbedingt konvergenten Reihe.) Hele-Shaw (Engineering 1897/1898 und Nav. Arch.)[3] hat zähe Flüssigkeiten (also große Reibung!) bei kleiner Geschwindigkeit verwandt. —

Bei Aufstellung der Bewegungsgleichungen eines in bewegter Flüssigkeit befindlichen Körpers sind die von der Flüssigkeit ausgeübten Kräfte zu berücksichtigen. Bei Reibungslosigkeit sind dies ausschließlich die Druckkräfte. Findet keine Zirkulation um den Körper statt, so verschwindet die Summe dieser Drucke, nicht aber immer ihr Moment.[4] Es erfordert also bei Potentialbewegung keinen Kraftaufwand, einen Körper gegen den Strom zu halten oder gleichförmig weiter zu bewegen, wohl aber treten Drehmomente auf, die den Körper quer gegen den Strom zu stellen streben. [Fußnote: Für ebene Probleme lassen sich diese Kräf-

---

[1] Für das folgende vgl. Lamb, 1895, §§ 59ff. und Love, 1901a, S. 92–97.

[2] Dieser Satz wurde nachträglich im Protokoll gestrichen.

[3] Hele-Shaw, 1898a,b.

[4] Vgl. Lamb, 1895, §§ 117ff.

te und Momente nach den Methoden der graphischen Statik ermitteln] (Beispiele aus der Schiffahrt). Die Bewegungsgleichungen werden erhalten durch Aufstellung der kinetischen Energie des Körpers + Flüssigkeit. Die der Flüssigkeit ergibt sich als Oberflächenintegral [5]

$$2T = +\rho \iiint [(\frac{\partial\varphi}{\partial x})^2 + (\frac{\partial\varphi}{\partial y})^2 + (\frac{\partial\varphi}{\partial z})^2] dxdydz = -\varrho \iint \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} do\,.$$

φ stellt sich als lineare Funktion der Translations- und Rotationsgeschwindigkeiten des Körpers dar; die kinetische Energie also als eine quadratische[,] ebenso die des Körpers selbst[,] also so auch ihre Summe (21 Koeffizienten). [6] Die Trägheit des Körpers ist um einen Bruchteil der verdrängten Wassermasse vergrößert. Ein Körper hat 3 Gleichgewichtslagen, in denen er eine erzeugte Translation beibehält; von ihnen ist eine labil, zwei stabil. Es werden Versuche an Rotationsellipsoiden gezeigt; die Ellipsoide sind drehbar um eine feste Achse senkrecht zur Rotations- 10 achse. Um die stabilen Lagen zeigen sich Schwingungen, die rasch abklingen. Ein Ellipsoid mit langer Rotationsachse trägt am Ende eine Flosse; geführt an der Achse, um die es beweglich ist, wird es stabil in der Bewegung in Richtung der Rotationsachse, bleibt aber bei seiner Bewegung labil bei einem erteilten Stoß in Richtung der Rotationsachse. Das Schiffssteuer wirkt nur indem der Steuermann durch geeignete Einstellung desselben geschehene Abweichungen aus der Fahrtrichtung wieder korrigiert.

M. Jaeger.

Vgl. die am Schluss des Buches in einem Umschlag befindlichen Figuren. [7]

Fig. 1 zeigt die durch Einzeichnen eines Quadratnetzes erhaltenen Kurven $\varphi = const.$ und $\psi = const.$ (weil $\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{\partial\psi}{\partial n} \quad s \perp n$ im ∞ kleinen Quadrate).

Fig. 2 zeigt neben den Flächen $\psi_1 = const.$ der vorigen Figur, die Kurven $\psi_2 = const.$ für eine Strömung senkrecht zur ersten.

Eine Strömung, die mit der ersten den Winkel α bildet, hat die Stromfunktion $\psi_1 \cos\alpha + \psi_2 \sin\alpha$. Aus Fig. 2 lassen sich für jeden Punkt die Werte $\psi_1 + \psi_2$ durch Verfolgung geeigneter Linien $\psi_1, \psi_2 = const.$ [???] aus bestimmen. Ein in der Richtung α aufgelegtes Diagramm von äquidistanten Parallelen stellt in den Maschen des Millimeterpapiers als Descartesschen Koordinaten die Linien der Gleichung $\psi_1 \cos\alpha + \psi_2 \sin\alpha = const.$ dar. Legt man das Diagramm in der Richtung der gewünschten Strömung so lassen sich durch punktweise Konstruktion leicht die Stromlinien dieser beliebigen schrägen Strömung um den Körper finden. Fig. 3

[5] Vgl. Lamb, 1895, § 121.

[6] Vgl. Lamb, 1895, § 126.

[7] Der im Protokollbuch am Ende eingeklebte Umschlag ist leer. Vermutlich handelt es sich um Zeichnungen, wie sie Jaeger auch in seiner Dissertation über „Graphische Integration in der Hydrodynamik“ verwendet hat, siehe dazu Jaeger, 1909.

Die Größe der Quadrate in Fig. 1 gibt die Geschwindigkeit und vermittelst der Druckgleichung den an der betreffenden Stelle der Oberfläche des Körpers herrschenden Druck an.

In Fig. 4 sind diese Drucke nach den Methoden der graphischen Statik in einem Kräfteplan und einem Seilpolygon dargestellt.[8] Der Kräftezug schließt sich d. h. es wirkt keine Einzelkraft. Der Abstand der ersten und letzten Seilpolygonseite gibt das Drehmoment M an. Ein Drehmoment bleibt bestehen, auch wenn auf das vordere Ende des Körpers eine Einzelkraft wirkt.

[8] Jaeger, 1909, S. 31f. und Tafel V. Zur graphischen Statik siehe Maurer, 1998.

Abb. 3.1: Letzte Seite des Eintrags von Manfred Jaeger im Protokollbuch des Hydrodynamikseminars, S. 10.

4 Über unstetige Potentialbewegung

4te Sitzung am 27. November 1907

11

1. Der Zweck des Vortrages bestand darin, die Erscheinungen, die im vorangegangenen Vortrage auf Grund der stetigen Potentialbewegung behandelt wurden, vom Gesichtspunkte der Theorie der unstetigen Potentialbewegung (Helmholtz-Kirchhoffsche Theorie)[1] zu beleuchten.

Der wesentliche Schritt, mit welchem wir durch die Helmholtzschen Annahmen der Wirklichkeit näher kommen, ist der, dass wir für den Widerstand eines gleichförmig bewegten Körpers eine *Einzelkraft* erhalten. Diese ist nach dieser Theorie der *Dichte* der Flüssigkeit (γ)[,] dem *Quadrate der Geschwindigkeit* (u) und – falls wir bei dem zweidimensionalen Probleme bleiben – den *linearen Abmessungen* des Körpers proportional:

$$W = \alpha\gamma U^2 [L]$$

Berechnungen für α, welche[s] von der Form des Körpers abhängt, liegen nur für zweidimensionale Strömungen vor.

2. Mathematische Formulierung der Aufgabe

Die zweidimensionale, wirbel- und reibungslose Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit kann durch folgende drei Größen charakterisiert werden:

12

$z = x + iy$ Koordinaten der Punkte in der Ebene
$\chi = \varphi + i\psi$ φ Geschwindigkeitspotential, ψ Stromfunktion
$w = u - iv$ u, v Geschwindigkeiten in der x bzw. y- Richtung.

Zwischen diesen Größen besteht die Beziehung

$$\frac{d\chi}{dz} = w$$

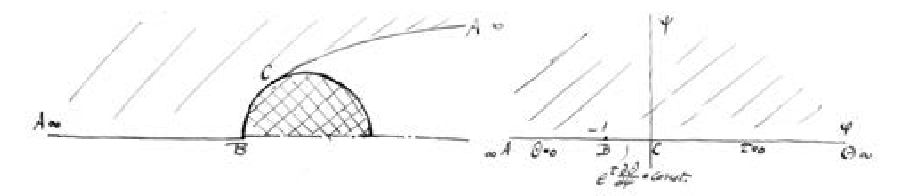
Bei der *stetigen Potentialbewegung* ist die Begrenzung sowohl in der z als in der χ-Ebene bekannt und es kann daher das Problem durch Abbildung der beiden Begrenzungsstücken gelöst werden.

[1] Helmholtz, 1868; Kirchhoff, 1869. Eine historische Darstellung gibt Darrigol, 1998 und Darrigol, 2005, Kap. 4; für das folgende vgl. Wieghardt-Ausarbeitung, S. 282ff. und Lamb, 1895, §§ 74ff.

Bei der *unstetigen Potentialbewegung* sind die Grenzen der z-Ebene im Vorhinein unbekannt; jedoch im speziellen Falle, wo alle festen Grenzen durch *gerade Linienstücke* gebildet werden, kann die Begrenzung der w-Ebene im Voraus angegeben werden, da geradlinigen festen Grenzen radiale Geraden, freien Grenzen (wegen Druckgleichheit ist der absolute Wert der Geschwindigkeit konstant) um den Koordinatenursprung konzentrische Kreisbogen entsprechen. Nach Abbildung der χ- und w-Ebenen lässt sich die freie Grenze durch Integration bestimmen.

Bei *krummlinigen Begrenzungen* kann die Aufgabe als Randwertaufgabe in Bezug auf die variablen φ und ψ aufgefasst werden.

3. Die unstetige Strömung um den Kreis. — Als Beispiel soll die unstetige Bewegung des Wassers um den Kreis behandelt werden:



13 Es sei

$$\log w = \tau + i\theta$$

dann ist $\tau = \log|w|$ und θ das negative Argument des Geschwindigkeitsvektors. Fassen wir

$$\omega = \tau + i\theta$$

als Funktion von $\chi = \varphi + i\psi$ auf, so haben wir folgende Bedingungen für $\psi = 0$

$$\begin{aligned} -\infty < &\varphi < -1 & \theta &= 0 \\ -1 < &\varphi < 0 & e^{\tau}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi} &= const. \\ 0 < &\varphi < +\infty & \tau &= 0 \end{aligned}$$

Die zweite Bedingung drückt die Konstanz der Krümmung der Stromlinie entlang des Kreisbogen aus. Es ist

$$-\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{\partial\theta}{\partial\varphi}\underbrace{\frac{d\varphi}{ds}}_{|\omega|=e^{\tau}} = e^{\tau}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}\,.$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$\omega = \underbrace{\frac{1}{2}\log\frac{1+i\sqrt{\chi}}{-1+i\sqrt{\chi}}}_{\text{Lösung für das Brett}} \underbrace{+i\sum_{n=0}^{\infty} A_n[\sqrt{\chi+1}-\sqrt{\chi}]^{2n+1}}_{\text{Zusatzglied}} .$$

Die Konstanten A_n können numerisch – durch sukzessive Approximationen berechnet werden; hierzu setzen wir

$$i\sqrt{\chi} = \cos\varphi ,$$

wodurch das Zusatzglied in eine Fouriersche Reihe übergeht.

Die numerische Berechnung ergibt das Resultat, dass die strömende Wassermenge sich an einer Stelle entsprechend einem Winkel von nahezu 45° von der Wand loslöst.

4. Spezialfall des Brettes 14

Unter den streng lösbaren Aufgaben mit geradlinigen festen Grenzen bietet der Spezialfall eines Brettes das meiste Interesse.[2] Man erhält als Resultante der Druckkräfte an der benetzten Oberfläche eine Kraft von der Größe

$$W = l\frac{\pi\sin\alpha}{4+\pi\sin\alpha}$$

(l Länge des Brettes, α Neigungswinkel gegen die Stromrichtung)[.]
Diese Kraft steht senkrecht zum Brett und ihr Angriffspunkt ist mit

$$x_0 = \frac{3}{4}\frac{\cos\alpha}{4+\pi\sin\alpha}l$$

von der Mitte gegen das in die Strömung hineinragende Ende verschoben. Die Verhältnisse sind in dem beiliegenden Vektordiagramm näher dargelegt.[3] Die Drehmomente stellen die schraffierten Flächen dar.

Für den senkrechten Brett ($\alpha = 90°$) ist

$$W = \frac{\pi}{4+\pi}l .$$

Dies ergibt für Luft bei der Geschwindigkeit = 1 m/sec. 55 gr. Widerstand pro Flächeneinheit; Versuchswerte zwischen 80–125 gr.

---

[2] Vgl. Lamb, 1895, § 77.

[3] Das Diagramm liegt nicht bei.

5. Praktische Anwendungen der Theorie.
Die eben dargelegte Behandlung der Strömung um den Brett lässt die Wirkungsweise der *Aeroplane* näher verfolgen.

Bewegt sich eine schiefe Fläche (Neigungswinkel α) mit der horizontalen Geschwindigkeit U, so bietet dieser Bewegung die Luft einen horizontalen Widerstand von der Größe

$$W = \gamma U^2 l \frac{\pi \sin^2 \alpha}{4 + \pi \sin \alpha}$$

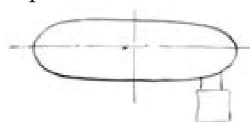
15 und eine vertikale Auftriebskraft, welche dem Apparate ermöglicht ein Gewicht

$$G = \gamma U^2 l \frac{\pi \sin \alpha \cos \alpha}{4 + \pi \sin \alpha}$$

in schwebender Lage zu halten. Da W durch die Triebkraft kompensiert werden muss, gibt das Verhältnis $\frac{G}{W}$ etwa die spezifische (auf die Triebkraft bezogene) Tragfähigkeit des Apparates. Die wäre nun theoretisch

$$\frac{G}{W} = \cot \alpha \,.$$

Beiliegendes Diagramm[4] bietet einen Vergleich so berechneter und von Langley experimentell bestimmter Werte.[5]



Eine andere Aufgabe wäre das Stabilisierungsproblem der lenkbaren Ballons. Ich will voraussetzen, dass die Luftströmung um den durch ein Ellipsoid ersetzten Ballonkörper der stetigen Potentialbewegung entspricht, während für kleine Bewegungen der Stabilisierungsfläche die Resultate der eben dargelegten Theorie angewendet werden können. Unter diesen Annahmen lauten die Bewegungsgleichungen für das Ellipsoid

$$A\frac{du}{dt} = Brv$$
$$B\frac{dv}{dt} = -Aru$$
$$R\frac{dr}{dt} = (A - B)uv - M$$

(A, B, R Coefficienten der Ausdrücke für die lebendige Kraft des Ellipsoids – siehe Vortrag Jäger. – u, v Geschwindigkeit des Schwerpunktes, r Drehgeschwindig-

[4] Das Diagramm liegt nicht bei.

[5] Die von Samuel P. Langley 1891 gemessenen Werte (Langley, 1891) wurden von Lord Rayleigh mit dem Stand der Theorie verglichen (siehe Rayleigh, 1891); für eine historische Darstellung der an diesem Beispiel aufscheinenden Diskrepanz von Theorie und Experiment in der Aerodynamik siehe Bloor, 2011, S. 80–82.

keit, M Drehmoment der Resultierenden der Druckkräfte auf die Stabilisierungsfläche)[.] 16

Ich setze – sehr kleine Schwingungen –

$$u = U + \bar{u}$$
$$v = \bar{v}$$

und

$$\dot{r} = \frac{d\theta}{dt}$$

so erhält man mit Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung

$$A\frac{d\bar{u}}{dt} = 0$$
$$B\frac{d\bar{v}}{dt} = -AU\frac{d\theta}{dt}$$
$$R\frac{d^2\theta}{dt^2} = (A - B)U\bar{v} - M$$

M ist von der Form (für sehr kleine θ)

$$M = CFU^2\theta$$

somit erhält man

$$R\frac{d^2\theta}{dt^2} + [CF - \frac{(A-B)A}{B}]U^2\theta = 0$$

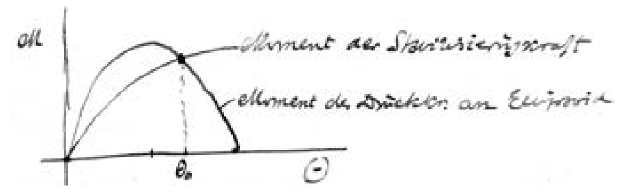
Falls

$$CF \lesseqgtr \frac{(A-B)A}{B},$$

so ist das Gleichgewicht ($\theta = 0$) stabil oder labil. Für $CF > \frac{(A-B)A}{B}$ ergibt sich eine schlingende Bewegung mit der Schwingungszeit

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{CF - \frac{(A-B)A}{B}}}.$$

Falls $CF < \frac{(A-B)A}{B}$, also bei nicht genügend groß dimensionierter Stabilisierungsfläche, erhält man je eine schiefe Stellung als stabile Gleichgewichtslage.



Th. v. Kármán

17 **Nachtrag**

Vergleich zwischen den Widerstandsgesetzen nach der Theorie der unstetigen Potentialbewegung und der Newtonschen Theorie.[6]

1) Senkrechtes Brett

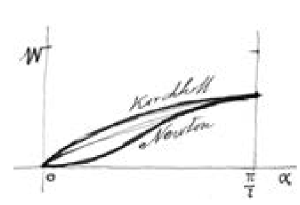
$$W = \gamma U^2 l \frac{\pi}{4+\pi} = 0.44 \gamma U^2 l \qquad \text{(Kirchhoff)}$$
$$W = \kappa \gamma U^2 l \qquad \text{(Newton)}$$

wo κ eine Erfahrungskonstante bezeichnet. Die beiden Formeln stimmen daher überein; die Erfahrungskonstante ergibt sich $\kappa = 0.44$ nach der Kirchhoffschen Theorie.

2) Schiefes Brett (Neigungswinkel α)

$$W = \gamma U^2 l \frac{\pi \sin\alpha}{4+\pi\sin\alpha} \qquad \text{(Kirchhoff)}$$
$$W = \kappa \gamma U^2 l \sin^2\alpha \qquad \text{(Newton)}$$

Die Newtonsche Theorie ergibt besonders für kleine α zu geringe Werte.



Dies ist in anschaulicher Weise dadurch erläutert, dass nach der Newtonschen Vorstellungsweise jeder Stromfaden in gleicher Weise abgelenkt wird; dagegen nach der Kirchhoffschen Theorie gibt es bei noch so kleinem Neigungswinkel eine Stelle, wo die Geschwindigkeit 0, d. h. der volle Druck $\frac{U^2}{2g}\gamma$ auftritt.

Th. v. Kármán

[6] Vgl. dazu Bloor, 2011, S. 80–82 und Anderson, 1998, S. 100–106.

5 Über Wirbelbewegung

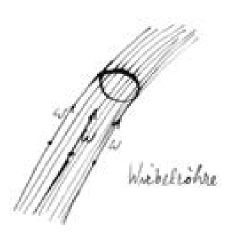
5te Sitzung, am 4. Dezember 1907

18

1) Es wurden zuerst die Helmholtzschen Sätze über Wirbelbewegung[1] kurz besprochen, nachdem vorher die Bezeichnungen und grundlegenden Definitionen behandelt worden waren. Bezeichnet man mit u, v, w wie gewöhnlich die Geschwindigkeiten, so hat man als Wirbelkomponenten in Richtung der drei Achsen

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial z}\right),\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right),\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

die mit ξ, η, ζ abgekürzt wurden. Die Resultante dieser drei Komponenten wurde ω genannt.



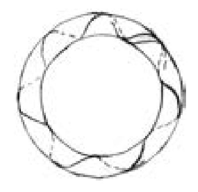
Als Wirbellinie bezeichnet man eine solche Linie, die von Punkt zu Punkt in Richtung der Rotation ω gezogen ist. Eine Wirbelröhre bekommt man, indem [man] durch alle Punkte einer kleinen geschlossenen Kurve die Wirbellinien hindurch legt. Nennt man den Flächeninhalt eines Querschnitts der Wirbelröhre σ, so ist $2\omega\sigma = \kappa$ ein Maß für die Stärke des Wirbels, κ heißt die Wirbelintensität.

Die schon erwähnten Helmholtzschen Sätze lassen sich jetzt folgendermaßen aussprechen:

1) Ein Teilchen, das Rotation besitzt, behält dieselbe immer bei; rotationsfreie Flüssigkeitsteile insbesondere bleiben rotationsfrei.
2) Die Wirbellinie wird immer aus denselben Flüssigkeitsteilchen gebildet; d. h. sie schwimmt mit der Flüssigkeit.
3) Die Wirbelintensität κ ist entlang jeder Wirbellinie konstant.

19

[1] Helmholtz, 1858. Zur Geschichte siehe Darrigol, 2005, Kap. 4.2; zur folgenden Darstellung der Wirbelbewegung vgl. Lamb, 1895, Kap. VII.



Es folgt daraus, dass die Wirbellinien niemals in der Flüssigkeit abbrechen können. Sie müssen also von Oberfläche zu Oberfläche gehen, oder geschlossen sein oder drittens etwa vom Typus einer Kurve, die sich ergibt, wenn man einen unendlich dünnen Faden nach Art einer Schraubenlinie auf einen Ring aufwickelt, so zwar, dass Steighöhe der Kurve und Umfang des Rings inkommensurabel sind.

2) Die Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit ist bestimmt, wenn man annimmt, dass sie sich bis ins Unendliche ausdehnt, falls man in jedem Punkte den Vektor ω kennt. Die Geschwindigkeiten ergeben sich mit Hilfe eines Vektorpotentials. Nämlich

$$u = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} F &= \tfrac{1}{2\pi} \iiint \tfrac{\xi'}{r} dx'dy'dz' \\ G &= \tfrac{1}{2\pi} \iiint \tfrac{\eta'}{r} dx'dy'dz' \\ H &= \tfrac{1}{2\pi} \iiint \tfrac{\zeta'}{r} dx'dy'dz' \end{aligned}\right\}$$

Spezialisiert man die Formeln für den Fall eines einzelnen Wirbelfadens, so kommt

$$F = \frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{dx'}{r} \qquad G = \frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{dy'}{r} \qquad H = \frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{dz'}{r}$$

20 und als Werte der Geschwindigkeiten u, v, w findet man:[2]

$$\left.\begin{aligned} u &= \tfrac{\kappa}{4\pi} \int \left(\tfrac{dy'}{ds'} \tfrac{z-z'}{r} - \tfrac{dz'}{ds'} \tfrac{y-y'}{r} \right) \tfrac{ds'}{r^2} \\ v &= \tfrac{\kappa}{4\pi} \int \left(\tfrac{dz'}{ds'} \tfrac{x-x'}{r} - \tfrac{dx'}{ds'} \tfrac{z-z'}{r} \right) \tfrac{ds'}{r^2} \\ w &= \tfrac{\kappa}{4\pi} \int \left(\tfrac{dx'}{ds'} \tfrac{y-y'}{r} - \tfrac{dy'}{ds'} \tfrac{x-x'}{r} \right) \tfrac{ds'}{r^2} \end{aligned}\right\}$$

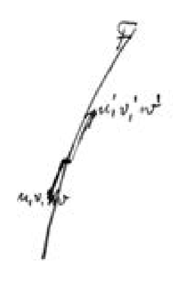
Es folgt, dass ein Teilchen ds' einer Wirbellinie einem beliebigen Flüssigkeitsteilchen mit Koordinaten x, y, z eine Geschwindigkeit erteilt, die senkrecht steht zu der durch ds' und x, y, z bestimmten Ebene. Die Größe dieser Geschwindigkeit Δq ergibt sich zu:

$$\Delta q = [(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2 + (\Delta w)^2]^{1/2} = \frac{\kappa}{4\pi} \sin\chi \frac{ds'}{r^2}$$

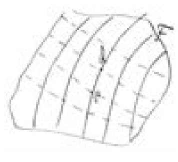
[2] Vgl. Lamb, 1895, § 147.

Das ist dasselbe Gesetz, wie es in der theoretischen Elektrizitätslehre unter dem Namen des Biot-Savartschen Gesetzes bekannt ist.

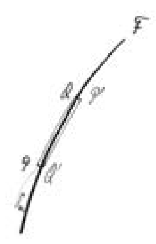
3.) Wirbelschichten.



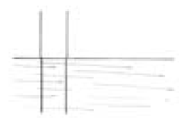
Wirbelschichten entstehen, wenn die tangentiale Geschwindigkeit einer Flüssigkeit längs einer Fläche F einen Sprung erleidet.[3] Es mag ausdrücklich bemerkt werden, dass hier eine Voraussetzung, nämlich die der Stetigkeit der Geschwindigkeit, die eine wesentliche Grundlage bei den übrigen Theoremen der Wirbeltheorie [nachträglich eingefügt:] (wie der Hydrodynamik überhaupt) ausmacht, fallengelassen wird. Auf der Fläche seien die Kurven der relativen Geschwindigkeit gezogen $\frac{dx}{u-u'} = \frac{dy}{v-v'} = \frac{dz}{w-w'}$; ferner die senkrechten Trajektorien dazu. $\overline{PQ}$ und $\overline{P'Q'}$ seien Linienelement dicht bei der Fläche (auf verschiedenen Seiten) und parallel zu einer Kurve der relativen Geschwindigkeit. Die Linien $\overline{PP'}$ und $\overline{QQ'}$ seien normal zu F und unendlich klein gegenüber $\overline{PQ}$, $\overline{P'Q'}$[.] 21



Dann gilt folgender Satz: Man erhält die angegebene Unstetigkeit in der Geschwindigkeit, wenn man sich die Fläche mit einer unendlich dünnen Wirbelschicht überdeckt denkt, so zwar, dass die senkrechten Trajektorien zu Wirbellinien werden und die (veränderliche) Dicke δ_n der Schicht und die Grösse von ω durch die Relation $2\omega\delta_n = q - q'$ verbunden sind. Von diesem Gesichtspunkte aus ergibt sich sofort die Möglichkeit, in einer reibungslosen Flüssigkeit Wirbel zu erzeugen.[4]



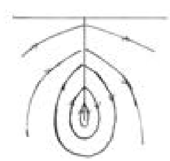
Ein erstes Beispiel ist das folgende:



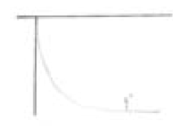
In eine ruhende Flüssigkeit werde plötzlich senkrecht zur freien Oberfläche ein Brett eingetaucht, kurze Zeit parallel mit sich selbst mit der Geschwindigkeit U bewegt und plötzlich dann wieder herausgehoben.

[3] Vgl. Lamb, 1895, § 149.

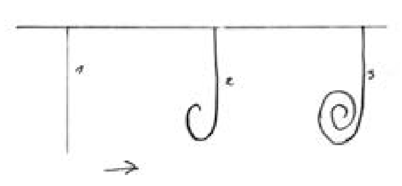
[4] Diesen Gesichtspunkt machte Klein zwei Jahre später zum Gegenstand einer kurzen Veröffentlichung (siehe: Klein, 1910; zur modernen Erklärung des „Kleinschen Kaffeelöffelexperiments“ siehe Saffman, 1992, Kap. 6).



Das ist ein Vorgang, den man etwa als Ruderschlag bezeichnen kann. Ist das Brett genügend lang, so hat in den mittleren Partien in dem Augenblicke vor dem Herausheben eine Geschwindigkeitsverteilung, wie sie die Potentialbewegung der Flüssigkeit für einen unendlich langen Ebenenstreifen ergibt. Aus der beigefügten Skizze der Kurven der instantanen Geschwindigkeit erkennt man, dass die tangentiale Geschwindigkeit in gegenüber liegenden Punkten des Brettes dieselbe Größe, aber entgegengesetztes Vorzeichen hat, und zwar steigt die tangentiale Geschwindigkeit von der Flüssigkeitsoberfläche, wo sie null ist, an und nähert sich, wenn man auf die Kante des Brettes zugeht asymptotisch dem Unendlichen.

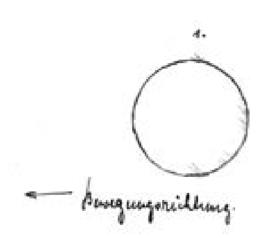


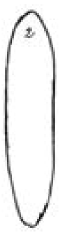
Wird nun das Brett herausgehoben, so haben wir eine Wirbelschicht. Man übersieht auch leicht (wir nehmen δ_n konstant) die Verteilung von ω entlang dem Brett. ω variiert genau wie die tangentialen Geschwindigkeiten. Man kann sich schließlich auf Grund dieser Überlegungen ein qualitatives Bild machen, wie sich die Wirbelschicht weiter bewegen wird.



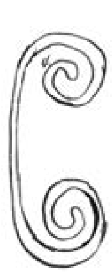
Die größere Intensität der Wirbel nach der Kante hin wird veranlassen, dass sich die Wirbelschicht, während sie in der Flüssigkeit voranschreitet, um die Kante mehr und mehr aufwickelt. Darauf nehmen die beigefügten Skizzen Bezug.

Ein weiteres Beispiel wird von Geheimrat *Klein* in der Diskussion zur Sprache gebracht. Man denke sich eine mit Wasser gefüllte Kugel durch ruhendes Wasser bewegt und plötzlich die vorher starre Kugelfläche verflüssigt. Man hat in diesem Augenblicke eine kugelförmige Wirbelschicht und übersieht nach vorangegangenen Erörterungen den qualitativen Weiterverlauf der Bewegung.









Die Kugel wird sich abplatten und dann nach dem Rande zu spiralig aufwickeln, wobei die ringförmige Randspirale durch eine dünner und dünner werdende Membran verbunden wird.

4) Geradlinige Wirbelfäden. Die Wirbelfäden seien alle parallel der z-Achse. 23 Dann ist $w = \xi = \eta = 0$; u und v sind Funktionen von x, y allein. Man hat ein zweidimensionales Problem. Von den früher erwähnten Funktionen F, P, H verschwinden F und P. H wird

$$H = -\frac{1}{\pi} \iint \zeta' \log r dx' dy'$$

und

$$u = \frac{\partial H}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

oder

$$u = -\frac{1}{\pi} \iint \zeta' \frac{y - y'}{r^2} dx' dy' \qquad v = \frac{1}{\pi} \iint \zeta' \frac{x - x'}{r^2} dx' dy' .$$

H ist also gleich einer Stromfunktion, wie man sie bei der Potentialbewegung einführt. Für einen Wirbelfaden von der Intensität κ vereinfachen sich die Formeln:

$$u = -\frac{\kappa}{2\pi} \frac{y - y'}{r^2} \qquad v = \frac{\kappa}{2\pi} \frac{x - x'}{r^2}$$

Der Wirbelfaden x', y' erzeugt in einem Punkte x, y eine Geschwindigkeit senkrecht zur Verbindungslinie von (x', y') und (x, y) vom Betrage $\frac{\kappa}{2\pi}$.

Aus der Beziehung $\sum \kappa_i u_i = 0, \sum \kappa_i v_i = 0$ folgt, dass in einem System von Wirbelfäden mit Koordinaten x_i, y_i der Punkt

$$\overline{x} = \frac{\sum \kappa_i x_i}{\sum \kappa_i} \quad \overline{y} = \frac{\sum \kappa_i y_i}{\sum \kappa_i} \quad (\overline{x}, \overline{y}) = \text{Wirbelzentrum}$$

während der ganzen Bewegung an der gleichen Stelle bleibt.



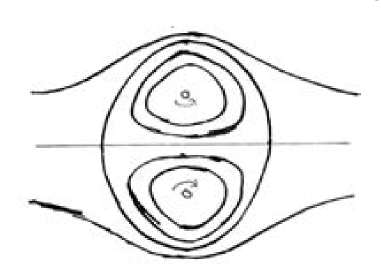


Mit Hilfe dieses Satzes behandelt man die einfachsten Fälle der Bewegung geradliniger Wirbel.[5] Ist nur ein einziger vorhanden, so wird er immer an der gleichen Stelle bleiben. Sind zwei Wirbel von den Intensitäten κ_1 und κ_2 in den Punkten A, B vorhanden, so ergibt sich eine gleichförmige Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2\pi \overline{AB}^2}$$

[5] Vgl. Lamb, 1895, § 155.

24 um das Wirbelzentrum O, das für mit gleichen Vorzeichen behaftete κ_1, κ_2 auf der Geraden AB, sonst auf der Verlängerung von AB liegt.



Spezielles Interesse hat der Fall, dass $\kappa_1 = -\kappa_2$. Die beiden Wirbelfäden bewegen sich rechtwinklig zu AB mit der Geschwindigkeit $\frac{\kappa_1}{2\pi \overline{AB}}$ weiter und nehmen einen Wirbelkörper mit sich.

5) Kreiswirbel.

Der Wirbel habe kreisförmigen Querschnitt; dessen Radius sei a. Der Radius des Wirbelkreises sei R. Dann bewegt sich der Kreis parallel zu sich selbst mit der Geschwindigkeit U, die mit der im Mittelpunkte des Kreises vom Radius R hervorgerufenen Geschwindigkeit[6]

$$U = \frac{\kappa}{4\pi R}\{\log \frac{8R}{a} - \frac{1}{4}\}$$

übereinstimmt, wobei R angenähert konstant bleibt. Der Wirbel nimmt einen Wirbelkörper mit sich, der ringförmig oder linsenförmig ist, je nachdem $\frac{R}{a} \gtrless 86$ ausfällt.

6.) Experimentelles.

I) Es werden Experimente in gefärbtem Wasser angestellt, indem Wirbel auf die pag. 21/22 näher erläuterte Weise hervorgerufen werden (Kaffeelöffelexperiment von Helmholtz.)

II) Demonstration an Rauchringen.

Hiemenz.

---

[6] Die Formel wurde 1867 von William Thomson (Lord Kelvin) abgeleitet, vgl. Lamb, 1895, § 162, S. 259–260.

6 Wellenbewegung

VI. Sitzung. 11. XII. 1907

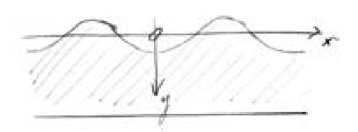
25

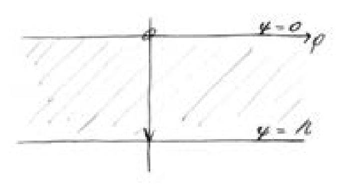
Der Vortrag beschäftigte sich nur mit ebenen Wellen. Den Gegenstand des ersten Teiles des Vortrages bildeten die Stokes'schen Wellen (Stokes, Math. and Phys. Papers Bd. I pg. 243ff. 384ff. Bd. V pg 146).[1] Stokes'sche Wellen sind Wellen von permanentem Typus, das Profil ändert sich also mit der Zeit nicht. Ist c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, so müssen u und v, die Geschwindigkeitskomponenten, Funktionen allein von $(x - ct)$ und y sein, wenn x die Richtung der Fortpflanzung ist, und y vertikal nach unten geht. Das Geschwindigkeitspotential φ ist also Funktion von $(x - ct), y$ und kann t allein nur noch linear enthalten:

$$\varphi = f(x - ct, y) + Ct\,.$$

Indem man nun dem Wasser eine Geschwindigkeit $-c$ erteilt, bleibt die Welle in Bezug auf das Koordinatensystem fest. Das Problem ist stationär geworden.

[1] Die angegebenen Seitenzahlen zu Band I der *Mathematical and Physical Papers by George Gabriel Stokes* stimmen nicht mit denen der heute zugänglichen Stokes-Ausgaben überein! Die grundlegende Arbeit Stokes, 1847 „On the theory of oscillatory waves" ist abgedruckt in Stokes, 1880, S. 197–219; bei der Herausgabe seiner Schriften ergänzte Stokes die Anhänge „On the relation of the preceding investigation to a case of wave motion of the oscillatory kind in which the disturbance can be expressed in finite terms" (Stokes, 1880, S. 219–225); „Considerations relative to the greatest height of oscillatory irrotational waves which can be propagated without change of form" (Stokes, 1880, S. 225–228); „Remark on the method of Art. I" (Stokes, 1880, S. 228–229) und ein „Supplement to a paper on the theory of oscillatory waves" (Stokes, 1880, S. 314–326). Drei Jahre später publizierte er als „preliminary notice" eine Arbeit „On the highest wave of uniform propagation" (Stokes, 1883); sie wurde 1905 im 5. Band seiner *Papers* noch einmal abgedruckt (Stokes, 1905, S. 140–145). Der im Seminarbeitrag angegebene Hinweis auf Band 5 bezieht sich auf die Stokes'sche Arbeit „On the maximum wave of uniform propagation. Being the supplement to a paper on the theory of oscillatory waves," die die Herausgeber von Band 5 unter Stokes's unpublizierten Manuskripten fanden (Stokes, 1905, S. 146–159). Zur historischen Darstellung der Stokes'schen Wellentheorie siehe Craik, 2005 und Darrigol, 2005, Kap. 2.4.





Hat man nun Wellen auf einem unendlich lan-
26 gen Kanal mit horizontalem Boden in der Tiefe h und vertikalen Seitenwänden, so gilt es, da der Boden und die Oberfläche jetzt Stromlinien ($y = h$ resp. $\psi = 0$) sind, denn die Teilchen gleiten an den Wänden entlang, den von dem Boden $y = h$ und der *unbekannten* Oberfläche begrenzten Streifen der xy-Ebene auf den Parallelstreifen $0 \leq \psi \leq k$ der φ-ψ-Ebene abzubilden. Da die Begrenzung des φ-ψ Bereiches bekannt ist, ist es praktisch, $\omega = \varphi + i\psi$ als unabhängige Variable einzuführen. Setzt man dann

$$x + iy = z = \text{Funktion von}\,(\varphi + i\psi)$$

so ist die Kontinuitätsgleichung $\Delta\varphi = 0$ erfüllt, da eben auch $\varphi + i\psi$ als Function von $x + iy$ aufgefasst werden kann. Als Grenzbedingungen hat man

1) für $\psi = k$ muss $y = h$ sein
2) für $\psi = 0$ d.h. in xy auf der Oberfläche muss der Druck konstant sein.

Nun ist

$$\frac{p}{\varrho} = gy * -\frac{1}{2}v^2 - \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} + Const.$$

27 für den Fall der nicht stationär gemachten Bewegung. Da nun

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} = -c\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -cu + C$$

so folgt

$$\begin{aligned}\frac{p}{\rho} &= gy - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + cu - C + Const \\ &= g(y + C') - \frac{1}{2}((u - c)^2 + v^2) - \frac{1}{2}c^2 + Const\end{aligned}$$

oder bei passender Wahl der Konstanten

$$g(y + C') - \frac{1}{2}v'^2 = 0$$

wo v' die Geschwindigkeit in der stationären Bewegung ist. Wenn man nun φ und ψ als unabhängige Variable einführt, so folgt:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{1}{S}\frac{\partial y}{\partial\psi}; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = +\frac{1}{S}\frac{\partial x}{\partial\psi}; \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{1}{S}\frac{\partial y}{\partial\varphi}; \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = +\frac{1}{S}\frac{\partial x}{\partial\varphi};$$

wo S die Funktionaldeterminante

$$S = \frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial\psi} - \frac{\partial x}{\partial\psi}\frac{\partial y}{\partial\varphi} = (\frac{\partial x}{\partial\varphi})^2 + (\frac{\partial x}{\partial\psi})^2$$

vermöge der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Es folgt, dass aus der Druckgleichung sich ergibt:

$$Sg(y + C') - \frac{1}{2}v'^2 = 0$$

Wäre die Bewegung ohne Wellen, so hätte man

$$x + iy = -\frac{\varphi + i\psi}{c}$$

zu setzen. Da noch ein oszillatorischer Bestandteil zukommt, so folgt

$$x + iy = -\frac{\varphi + i\psi}{c} + \sum_n \{A_n e^{\frac{im(\varphi+i\psi)n}{c}} + B_n e^{-\frac{im(\varphi+i\psi)n}{c}}\}$$

oder

$$x = -\frac{\varphi}{c} + \sum_n \{A_n e^{-\frac{\psi mn}{c}} + B_n e^{\frac{\psi mn}{c}}\} \sin\frac{mn\varphi}{c} \qquad 28$$
$$y = -\frac{\psi}{c} + \sum_n \{A_n e^{-\frac{\psi mn}{c}} - B_n e^{\frac{\psi mn}{c}}\} \cos\frac{mn\varphi}{c}$$

Da für $\psi = k \quad y = h$ sein muss, hat man

$$A_n e^{-\frac{mnk}{c}} = B_n e^{\frac{mnk}{c}}$$

$$h = \frac{k}{c}$$

Also, bei geeigneter Änderung der Bedeutung von A_n:

$$x = -\frac{\varphi}{c} + \sum_n A_n \cosh\frac{mn(\psi + k)}{c} \sin\frac{mn\varphi}{c}$$
$$y = -\frac{\psi}{c} + \sum_n A_n \sinh\frac{mn(\psi + k)}{c} \cos\frac{mn\psi}{c}$$

Bildet man nun S, so sieht man, dass dieser Ausdruck in den A_n quadratisch und linear ist. Da für $\psi = 0$

$$Sg(y + C') - \frac{1}{c} = 0$$

sein muss, hat man in S $\psi = 0$ zu setzen, dies mit $g(y - C')$ zu multiplizieren, wodurch man nach Verwandlung der cos Produkte in cos der Vielfachen, eine Fourier-Reihe erhält. Diese soll andauernd einen konstanten Wert haben, für alle φ. Es folgt, dass die Koeffizienten, Ausdrücke in denen die A_n in erster, zweiter und dritter Potenz vorkommen, verschwinden. Auf diese Weise erhält man unendlich viele Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Die erste bestimmt 29 die Konstante C' als Funktion von A_1, die zweite die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c, die folgenden A_2, A_3 ... als Functionen von A_1. Es lässt sich zeigen, dass die A mit geradem Index gerade, die mit ungeradem Index ungerade Funktionen von A_1 sind. A_1 selbst ist noch willkürlich und bestimmt die maximale Höhe. Die Gleichungen werden durch Iteration gelöst.

Lässt man $h = \infty$ werden, so findet Stokes[2] für das Wellenprofil eine Gleichung, die bis auf Glieder 5. Ordnung in A_1 gilt, und von einer entsprechenden Entwicklung der Trochoide um

$$-\frac{2}{3}a^4 \cos 2\pi m$$

abweicht, wo $A_1 = a - \frac{9}{8}a^3$ ist. Das bedeutet, dass das Wellenprofil an den Scheiteln etwas über, dazwischen etwas unter der Trochoide liegt. Für die Geschwindigkeit c folgt:

$$c = \sqrt{\frac{m}{g}}(1 + \frac{1}{2}m^2b^2 + \frac{23}{12}m^4b^4), \quad (b = A_1)\,.$$

Um die Bahn des einzelnen Teilchens zu bestimmen setzt man

$$x = \alpha + \xi - ct$$
$$y = \beta + \eta$$

30 wo α und β die Koordinaten des Teilchens zur Zeit $t = 0$ sind. Dann ist

$$\frac{d\xi}{dt} = u = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$
$$\frac{d\eta}{dt} = v = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,.$$

[2] Vgl. Stokes, 1880, S. 317ff.

Da sich durch Umkehrung der Reihen

$$\varphi = ace^{-m(\beta+\eta)} \sin m(\alpha + \xi - ct)$$

bis auf Glieder dritter Ordnung ergibt, so folgt, wenn man φ einsetzt, die Exponentialfunktion und die trigonometrischen entwickelt und durch sukzessive Approximation integriert

$$\begin{aligned} \xi &= ae^{-m\beta} \sin m(\alpha - ct) + m^2 a^2 cte^{-2m\beta} \\ \eta &= ae^{-m\beta} \cos m(\alpha - ct). \end{aligned}$$

Die Bewegung eines Teilchens besteht also aus einer einfachen Schwingung + Translation in der Richtung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit.



Stokes hat konstatiert, dass eine Welle im extremalen Fall ihrer Höhe auf den Kammen eine Ecke mit einem Winkel von 120° bildet.[3]

31

Es sagt, wenn die Bewegung in der angegebenen Weise stationär gemacht ist, so kann man sich vorstellen, dass das Wasserteilchen längs der Oberfläche hingleitet. Die Geschwindigkeit wird proportional der Wurzel aus dem Abstand von einer gewissen Linie über der Oberfläche (datum line) variieren, im Kamm muss sie Null sein, (also die datum line durch den Kamm gehen). Wenn man das Potential um den Kamm herum nach Polarkoordinaten entwickelt, so hat man in erster Annäherung

$$\varphi = r^n \sin n\theta$$

dann ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = nr^{n-1} \sin n\theta$$

also $n - 1 = \frac{1}{2}, n = \frac{3}{2}$.

Andererseits muss in hinreichender Nähe vom Kamm die Winkelgeschwindigkeit verschwinden, also

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{3}{2} r^{\frac{3}{2}} \cos \frac{3}{2}\theta = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

und da Symmetrie in Bezug auf die Vertikale vorhanden ist, muss der Winkel der beiden Äste des Profils 120° betragen.

[3] Stokes, 1880, S. 227.



32 Stokes gibt noch eine graphische Methode zur Ermittlung des Wellenprofils an.[4] Man nimmt das Profil plausibel an, ebenso die datum line, dann ist

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \sqrt{2gh}\,.$$

Also

$$\varphi(x) = \int \sqrt{2gh}ds = \int \sqrt{2gh}\frac{ds}{dx}dx$$

was durch graphische Integration auszuführen ist. Graphisch ist dann auch x als Funktion von φ gegeben und man kann

$$\frac{\varphi}{c} + x(\varphi) = f(\varphi) = \sum A_n \sin mn\varphi$$

bilden. Nun ist

$$\begin{aligned} y = f(\varphi) &= \sum A_n \cos mn\varphi \\ &= \frac{1}{\pi}\sum \cos mn\varphi \int_0^{2\pi} F(\varphi)\sin(n\varphi')d\varphi'. \end{aligned}$$

Durch Vertauschung von $\sum$ und $\int$ (Kunstgriff, dass der allgemeine Term, mit r^n multipliziert, vertauscht, und dann $\lim_{r=1}$ gebildet wird!) folgt:

$$f(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\{F(\varphi+\chi) - F(\varphi-\chi)\}\cot\frac{1}{2}\chi d\chi$$

wo χ Integrationsvariable ist. Die Lösung wurde graphisch durchgeführt und man erhält so eine Verbesserung.

33 Für den Fall endlicher Tiefe ist die Durchführung nicht so einfach, da eine Summierung der auftretenden Reihen nicht gelungen ist. Wohl aber geht die Sache für den Fall der Einzelwelle, wo anstelle der Fourier-Reihe ein Integral tritt:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{\varphi}{c} + \int_0^{\infty}\omega(n)(e^{nm\frac{\psi+h}{c}} + e^{-nm\frac{\psi+h}{c}})\sin\frac{mn\varphi}{c}dn \\ y &= -\frac{\psi}{c} + \int_0^{\infty}\omega(n)(e^{nm\frac{\psi+h}{c}} - e^{-nm\frac{\psi+h}{c}})\cos\frac{mn\varphi}{c}dn \end{aligned}$$

[4] Stokes schrieb dazu: „Proposed method of drawing the wave profile, and determining the velocity of propagation, for oscillatory waves on deep water, when the disturbance is too great to be mastered by the approximations, proceeding according to powers of b, given in last paper of Vol. I of my book.“ Die Herausgeber von Band 5 seiner *Papers* gaben dieser Arbeit die Überschrift „On the maximum wave of uniform propagation. Being the supplement to a paper on the theory of oscillatory waves.“ (Stokes, 1905, S. 146–159).

wo

$$\omega(n) = \frac{1}{\pi \cosh \frac{nmk}{c}} \int_0^\infty F(\varphi') \sin(n\varphi') d\varphi' .$$

Also für $\psi = 0$[5]

$$f(\varphi) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tanh \frac{nmk}{c} \cos n\varphi F(\varphi') \sin \frac{nm\varphi'}{c} dnd\varphi' .$$

Da nun

$$\int_0^\infty \tanh nk \sin \varphi' dn = \frac{\pi}{k} \frac{1}{2 \sinh \frac{\pi\varphi'}{2k}}$$

so folgt:

$$f(\varphi) = \frac{1}{k} \int_0^\infty \{F(\varphi + \chi) - F(\varphi - \chi)\} \frac{d\chi}{2 \sinh \frac{\pi\chi}{2k}} .$$

Stokes suchte auf diesem graphischen Wege, wo seine Reihen schlecht konvergieren (Majorante $\sum \frac{1}{n^{5/3}}$!) an die maximale Welle heranzukommen. Die Methode erwies sich aber als nicht sehr günstig, wie einige nachher angegebenen Zahlen erweisen.[6] Michell hat in den Phil. Mag. 1893 eine Arbeit veröffentlicht,[7] in der es ihm gelingt, die Extremalwelle streng darzustellen. Er findet 34

$$z = \int A(-i \sin \omega)^{-\frac{1}{3}} e^{-\frac{1}{3}\omega i} (1 + c_1 e^{2i\omega} + c_2 e^{4i\omega} + ...) d\omega .$$

An der Oberfläche findet er, dass

$$\frac{d\omega}{dz} = \sin^{\frac{1}{3}} \varphi \, e^{\frac{1}{3} i (\varphi - \frac{\pi}{2})} (1 + b_1 e^{2i\varphi} + b_2 e^{4i\varphi} + ...)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \sin^{-\frac{1}{3}} \varphi [\cos(\frac{1}{3}\varphi - \frac{\pi}{6}) - 0,04 \cos(2\varphi - \frac{1}{3}\varphi + \frac{\pi}{6})$$
$$-0,008 \cos(4\varphi - \frac{1}{3}\varphi + \frac{\pi}{6}) - 0,001 \cos(6\varphi - \frac{1}{3}\varphi + \frac{\pi}{6})]$$

und entsprechend $\frac{\partial y}{\partial \varphi}$ (sin anstelle von cos!)[.]

[5] Zwischen der obigen und der folgenden Formel findet sich der Einschub: $F(\varphi') = (x + \frac{\varphi'}{c})$.

[6] Stokes hatte, wie die Herausgeber seines Manuskripts bemerkten, mit „laborious calculations“ versucht, für drei Spezialfälle seine Theorie mit experimentellen Werten zu vergleichen. „They appear to show that the method is not so successful as Sir George Stokes anticipated.“ Stokes, 1905, S. 158.

[7] Michell, 1893.

In der Umgebung der Ecke ist

$$z = \frac{\frac{3}{2}\varphi^{\frac{2}{3}}(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})}{(1 + b_1 + b_2 + ...)}$$

wo $1 + \sum b = 1,0758$.

Michell stellt fest, dass das Wellenprofil der extremalen Form keine Wendepunkte hat, eine Frage, die Stokes noch offen gelassen hatte.

35 Er fand für das Verhältnis der Höhe zu Wellenlänge 0,142, während Stokes ja nach der Annahme des anfänglichen Profils 0,22; 0,165 und 0,195 gefunden hatte. Michell vergleicht seine Welle mit einem Beobachtungsbeispiel (von dem die extremale Gestalt nicht behauptet wird):

Abercromby:[8]	Länge 765	Höhe 45	Geschwindigkeit 47
Michell:	Länge 765	Höhe 100	Geschwindigkeit 47

Das Verhältnis der Geschwindigkeit für die maximale Welle zu der infinitesimalen gibt er auf 1,2 an.

Zweiter Teil: Es wurden die beiden ersten Arbeiten von Lord Kelvin, Edinburgh Proc. 1905, 1, besprochen.[9] Kelvin setzt die Verrückungen eines Teilchens

$$\xi = \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x, y, t) \qquad \eta = \frac{\partial}{\partial y}\varphi(x, y, t)$$

und die Geschwindigkeiten

$$u = \frac{\partial}{\partial x}\dot{\varphi} \qquad v = \frac{\partial}{\partial y}\dot{\varphi}\,.$$

[9] William Thomson (Lord Kelvin) publizierte von 1904 bis 1906 in den *Proceedings of the Royal Society Edinburgh* folgende Arbeiten über die Theorie von Wasserwellen: „On deep-water two-dimensional waves produced by any given initiating disturbance" (Bd. 25, 1. Februar 1904, S. 185–196); „On the front and rear of a free procession of waves in deep water" (20. Juni 1904); „Deep water ship-waves" (20. Juni 1904); „Deap sea ship-waves" (17. Juli 1905); „Initiation of deep-sea waves of three classes (1) from a single displacement; (2) from a group of equal and similar displacements; (3) by a periodically varying surface-pressure" (22. Juni 1906). Sie wurden danach auch im *Philosophical Magazine* publiziert und im vierten Band von Kelvins *Mathematical and Physical Papers* unter der Überschrift „Waves on Water" abgedruckt (Thomson, 1910, S. 338–350, 351–367, 368–393, 394–418, 419–456). Der im Seminarbeitrag präsentierte Inhalt stammt im wesentlichen aus Kelvins Beiträgen aus dem Jahr 1904.

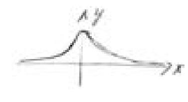
Da er nur kleine Amplituden annimmt, vernachlässigt er in der Druckgleichung das Geschwindigkeitsquadrat und findet bei geeigneter Wahl der Konstanten aus dieser: 36

$$g\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \qquad y = 0$$

eine Gleichung vom Typus der linearen Wärmeleitung.[10] Es ergibt sich, dass

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sin\{\frac{gt^2 x}{4\varrho^2} + \theta\} e^{-\frac{gt^2 y}{\rho^2}} \qquad [\theta = \arctan\sqrt{\frac{\rho + z}{\rho - z}}$$

wo xy die Gleichgewichtslage des Teilchens angeben. Für $t = 0$ ist



$$\eta = \sqrt{\frac{\rho + z}{\rho}}$$

eine Kurve von nebenstehendem Typus.

Einer anfänglichen Störung von dieser Gestalt würde also der durch obige Formel gegebene Verlauf entsprechen.

Kelvin hat die Kurven für eine Reihe von Werten von t aufzeichnen lassen. (Sie wurden projiziert).[11] Es zeigt sich, dass sich vom Punkte maximaler Störung nach beiden Seiten Wellen ausbreiten, die mit der Zeit immer kleiner werden, während sich ihre Länge vergrößert. Im Punkte der Störung selbst werden die Wellen so klein, dass sie bald nicht mehr wahrzunehmen sind. 37

Indem nun Kelvin die Störung η superponiert, so dass die maximale Störung in gleichmäßig entfernten Punkten angenommen wurden, dazu die negative Störung η, wo die Maxima in zwischenliegenden Punkten angenommen wurden, erhält er eine periodische Störung von dem Typus der nebenstehenden Figur.



Die Wirkung superponiert sich dann einfach zu den Wirkungen der einzelnen Störungen η.

Kelvin führt das weiter speziell für den Fall aus, dass auf der einen Seite der y-Achse eine ungefähr periodische Störung vorliegt, hingegen auf der anderen Seite ein rasches Ablassen der Störung in die Gleichgewichtslage. Die entsprechenden Figuren wurden auch projiziert und erläutert.[12]

H. Schroeder

[10] Vgl. Kelvins Arbeit „On deep-water two-dimensional waves produced by any given initiating disturbance" (Thomson, 1910, S. 339).

[11] Vgl. Thomson, 1910, S. 345.

[12] Vgl. Thomson, 1910, S. 360–363.

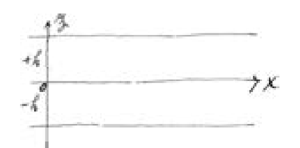
7 Stationäre Strömung inkompressibler reibender Flüssigkeiten

7te Sitzung. 18. 12. 1907.

38

In den bisherigen Vorträgen wurden immer 2 Einschränkungen gemacht. Es wurde immer angenommen 1. dass die Flüssigkeit reibungslos sei, und 2. dass sie sich nicht zusammendrücken lasse. Die erste Einschränkung soll jetzt fallen gelassen, die 2. aber noch beibehalten werden.

1. Die Laminarbewegung. [1]
Hierunter versteht man die stationäre Strömung zwischen zwei parallelen Ebenen.

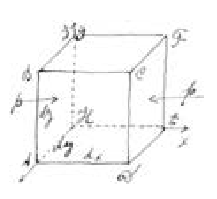


Die Strömung verlaufe $\|$ zur x-Achse, also

$$u = u(z) \qquad v = 0 \qquad w = 0$$

Die Reibung einer Flüssigkeit ist unabhängig von der absoluten Geschwindigkeit der einzelnen Flüssigkeitsteilchen, sie hängt nur ab von den relativen Geschwindigkeiten der einzelnen Schichten, d. h. vom Geschwindigkeitsgefälle und einer Konstanten μ, dem Reibungskoeffizienten, der jeder Flüssigkeit individuell ist. In unserem Falle ist somit an jedem Ort die Reibungskraft gegeben durch $\mu \frac{\partial u}{\partial z}$. Wir greifen aus der Flüssigkeit ein kleines Parallelepiped dx dy dz heraus.

39



Auf die Fläche $ADEH$ wirkt der Zug	$-\mu \frac{\partial u}{\partial z} dxdy$
Auf die Fläche $BCFG$ wirkt der Zug	$+\mu(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz) dxdy$
also auf das ganze Parallelepiped	$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dzdxdy$

[1] Vgl. Lamb, 1906, § 318.

also auf den Volumeninhalt	$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$
Auf die Fläche $ABGH$ wirkt ein Druck	$pdydz$
Auf die Fläche $CDEF$ wirkt ein Druck	$-(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx)dydz$
also auf das ganze Volumen wirkt der Druck	$-\frac{\partial p}{\partial x}dxdydz$
also auf den Volumeninhalt:	$-\frac{\partial p}{\partial x}$

Soll nun Gleichgewicht herrschen, dann muss sein:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad ①$$

In der Richtung der y- und der z-Achse findet keine Bewegung statt.
Also $p = p(x)$ d. h. eine Funktion von x allein.
Also $u = u(z)$ d. h. eine Funktion von z allein.
① lässt sich somit leicht integrieren. Wir erhalten:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\mu} z \frac{\partial p}{\partial x} + A$$

$$\text{also} \quad u = \frac{1}{2\mu} z^2 \frac{\partial p}{\partial x} + Az + B \qquad ②$$

Die beiden Integrationskonstanten A und B bestimmen wir mit Hilfe der Grenzbedingungen. Diese sind:

Die Flüssigkeit soll an den Grenzen haften

$$\text{also} \qquad u = 0 \quad \text{für} \quad z = \pm h$$

$$\text{also} \qquad 0 = \frac{1}{2\mu} h^2 \frac{\partial p}{\partial x} \pm hA + B$$

Setze $A = 0$
40 Also $B = -\frac{h^2}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}$
Also lautet jetzt unsere Gleichung für u

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (z^2 - h^2) \qquad ③$$

③ ist die Gleichung einer Parabel mit dem Scheitel auf der x-Achse.
Für die durchströmende Flüssigkeit Q erhalten wir:

$$Q = \int_{-h}^{+h} udz = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \int_{-h}^{+h} (z^2 - h^2)dz = -\frac{2}{3} \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Hieraus für die mittlere Geschwindigkeit u_m:

$$u_m = \frac{Q}{2h} = -\frac{1}{3}\frac{h^2}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}$$

2. Die allgemeinen Differentialgleichungen für reibende Flüssigkeiten.[2]
Unsere Gleichung für Laminarbewegung lautete:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Lassen wir erst die Einschränkung fallen, dass die Bewegung stationär sein soll, dann erhalten wir links, ähnlich wie bei idealen Flüssigkeiten, die zeitliche Veränderung der Geschwindigkeit in der Richtung der x-Achse:

$$\rho\frac{Du}{Dt} = (\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z})\rho$$

Lassen wir auch Bewegung in der Richtung der y- und der z-Achse zu, dann wird u eine Funktion von $xyz, u = u(x,y,z)$, und das 2te Glied rechts in unserer Gleichung lautet

$$\mu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}) = \Delta u$$

Jetzt sind also auch v und w nicht mehr 0, wir erhalten somit 2 entsprechende Gleichungen für v und w.

Also erhalten wir als allgemeine Bewegungsgleichungen für inkompressible reibende Flüssigkeiten: 41

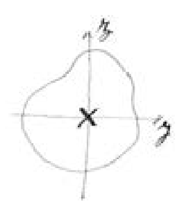
$$\varrho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\Delta u$$
$$\varrho\frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\Delta v$$
$$\varrho\frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\Delta w$$

Dazu kommt noch die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

[2] Vgl. Lamb, 1906, § 316.

3. Stationäre Strömung in einem Kanal mit beliebigem, aber konstanten Querschnitt.



Die Achse des Kanals sei die x-Achse unseres Koordinatensystems. Die Strömung verlaufe $\|$ zur $+x$-Achse, also

$$v = 0 \qquad w = 0 \qquad u = u(y, z)\,.$$

Die Strömung ist nach Voraussetzung stationär, also

$$\frac{Du}{Dt} = 0.$$

Also erhalten wir aus unseren allgemeinen Bewegungsgleichungen für unseren speziellen Fall die Gleichungen:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$
$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y}$$
$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

Also $p = p(x)$, d. h. p ist nur Funktion von x, nach den 2 letzten Gleichungen. Aus der ersten Gleichung folgt sofort:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = const.$$

42 Die Gleichung:

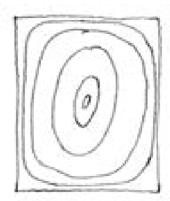
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\frac{\partial p}{\partial x}}{\mu}$$

ist aus einem anderen Gebiete der Physik bekannt. Spannen wir nämlich eine Membran in eine feste Kurve, bringen eine geringe gleichmäßige Belastung p pro Flächeneinheit auf die Membran, bezeichnen mit S die Spannung der Membran, mit h die Erhebung der einzelnen Punkte der Membran über der yz-Ebene, dann erhalten wir für h die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{p}{S}\,.$$

Schreiben wir vor, dass an der Grenze $h = 0$ sein soll, d. h. dass die Grenzkurve eine starre Kurve sei, dann stimmt auch die Grenzbedingung mit der Grenzbedingung unseres Problems überein: $u = 0$ an der Grenze, d. h. die Flüssigkeit haftet an

der Wand. Die gespannte Membran gibt uns somit ein Bild der Geschwindigkeitsverteilung in unserem Kanal, wir haben einfach u für h in die Lösung einzusetzen.[3]



Nebenstehende Figur stellt für einen 4-eckigen Querschnitt die Kurve $h = const.$ und auch $u = const.$ dar. Allgemein gelöst ist das Problem für einen kreisförmigen, einen elliptischen, einen dreieckigen, einen 4-eckigen und einen kreuzförmigen Querschnitt.

4. Zeitlicher Anfang der Bewegung. 43

Wir betrachten eine ∞ lange Platte, die an die Flüssigkeit grenzt. Die Flüssigkeit soll ruhen. Wir geben der Platte eine konstante Geschwindigkeit U in der Richtung der $+x$-Achse. In Folge der Reibung reißt die Platte die Flüssigkeit mit sich. Die Geschwindigkeit, die der Flüssigkeit erteilt wird, ist nur Funktion von z und t.



Also $u = u(z, t)$ und $v = 0 \quad w = 0.$
Aus der Gleichung

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

folgt:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad \text{also} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad v = 0, \quad w = 0$$

Also erhalten wir aus den allgemeinen Bewegungsgleichungen:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$
$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y}$$
$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

Nach Voraussetzung soll aber die Flüssigkeit ruhen im ∞.
Also

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

Also lautet die Gleichung für die Bewegung der Flüssigkeit in der Nähe der Platte:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

[3] Die Auswölbung einer über einen Querschnitt gespannten Membran diente Prandtl bereits früher als Analogie für die Berechnung der Torsion eines prismatischen Stabes gleichen Querschnitts (siehe dazu Prandtl, 1903).

Das ist aber eine Gleichung von derselben Form wie die Wärmeleitungsgleichung. Wenn wir somit dieselbe Grenzbedingung in die Wärmeleitungsgleichung einführen, dann können wir die Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf unser Problem übertragen.[4]

44

Die Gleichung für die Wärmeleitung lautet:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}$$

ϑ = Temperatur
$\kappa = \frac{h}{c\rho}$

wo

h = Wärmeleitungsvermögen des Körpers
c = spezifische Wärme des Körpers
ρ = Dichte des Körpers.

Als Grenzbedingungen führen wir ein:
Für $t \leq 0$ sei $\vartheta = 0$ für alle z.
Für $t > 0$ und $z = 0$ sei $\vartheta = \Theta$,
wo Θ = Temperatur des erwärmenden Körpers.
Θ sei konstant.

In unserem Problem haben wir entsprechende Grenzbedingungen:
Für $t \leq 0$ ist $u = 0$ für alle z.
Für $t > 0$ und $z = 0$ sei $u = U$,
wo U = Geschwindigkeit der Platte.
U = konstant.

Durch einfache Übertragung der Lösung dieses Wärmeleitungsproblems auf unser Problem erhalten wir

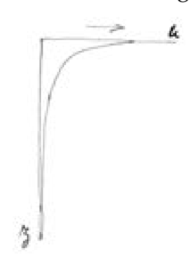
$$u = U[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{z}{2}\sqrt{\frac{\rho}{\mu t}}} e^{-\zeta^2} d\zeta]$$

Durch diese Gleichung ist die Geschwindigkeit u definiert als Funktion von $\frac{z^2\rho}{2\mu t}$. Also

$$u = f(\frac{z}{\sqrt{t}})$$

[4] In der Dissertation von Heinrich Blasius wird die zeitliche Entstehung der Grenzschicht allgemeiner für den Fall eines Zylinders von beliebigem Querschnitt behandelt, der ebenfalls auf die aus der Wärmeleitung bekannten Lösungen führt (Blasius, 1907, S. 22–27).

Wir erhalten folgende Kurve für u:



Halte t konstant und lasse z sich wachsen: 45

für $z = \infty$ ist

$$u = U[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\zeta^2} d\zeta] = 0$$

für $z = 0$ ist

$$u = U[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^0 e^{-\zeta^2} d\zeta] = U$$

d. h. im ∞ ist die Geschwindigkeit der Flüssigkeit 0, an der Wand hat die Flüssigkeit die Geschwindigkeit der Wand.

Halte nun z konstant und lasse t sich ändern:

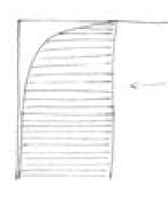
für $t = 0$ ist

$$u = U[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\zeta^2} d\zeta] = 0$$

für $t = \infty$ ist

$$u = U[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^0 e^{-\zeta^2} d\zeta] = U$$

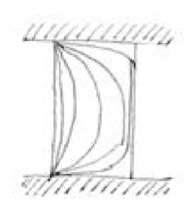
d. h. nach ∞ langer Zeit hat die ganze Flüssigkeit die Geschwindigkeit der Wand angenommen.



Bringen wir nun plötzlich die Wand zum Stillstehen, dann wirkt die Wand verzögernd auf die noch bewegte Flüssigkeit und die schraffierte Fläche stellt uns die Geschwindigkeitsverteilung der Flüssigkeit dar:

$$u' = u - U = -\frac{2U}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{z}{2}\sqrt{\frac{\rho}{\mu t}}} e^{-\zeta^2} d\zeta\,.$$

U bedeutet die verzögernde Wirkung der Wand.



2 Wände:

Führen wir in unserm letzten Falle noch eine 2te Wand ein und überlassen die Flüssigkeit sich selbst, dann tritt ein Vorgang ein wie bei der Wärmeleitung.

Die Reibung wird allmählich die Geschwindigkeit der Flüssigkeit ganz vernichten. 46

Führen wir jedoch die Nebenbedingung ein, dass für alle t die in der Zeiteinheit durch den Querschnitt hindurch fließende Wassermenge Q konstant sein soll, also

$$Q = b \int_{-h}^{+h} u dz = const.$$

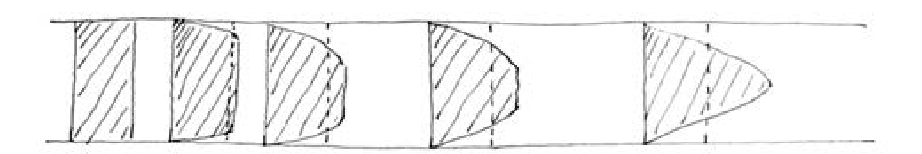
für alle t, dann kann $\frac{\partial p}{\partial x}$ nicht mehr 0 sein. Unsere Gleichung lautet somit:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Nach einiger Zeit wird aber u einen konstanten Wert annehmen, also $\frac{\partial u}{\partial t}$ wird 0 nach einiger Zeit und unsere Gleichung geht über in

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} .$$

Das ist aber die Gleichung für die Laminarbewegung. In Folge dessen erhalten wir nach einiger Zeit eine parabolische Verteilung für u auf den Querschnitt. Die folgende Fig. veranschaulicht die Geschwindigkeitsverteilung an verschiedenen Stellen:



Wegen der Bedingung $Q = b \int_{-h}^{+h} u dz = const.$ ist der Flächeninhalt der schraffierten Flächen konstant.

47 **5. Örtlicher Anfang der Bewegung.**

Tauchen wir eine Platte parallel zur Strömung in fließendes Wasser, so beobachten wir folgendes:

a) Vor der Platte bleibt die Potentialbewegung bis ganz nahe an die Platte heran erhalten.

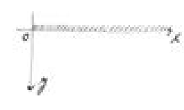
b) Auch in einiger Entfernung seitlich von der Platte bleibt die Potentialströmung erhalten. $u = \bar{u}$ sei hier die Geschwindigkeit.

c) An der Platte selbst haftet die Flüssigkeit. Hier ist $u = 0$.

d) Zwischen der Platte und der seitlichen Potentialströmung bildet sich eine Grenzschicht aus, in der die Geschwindigkeit rasch vom Werte $u = 0$ auf den Wert $u = \bar{u}$ ansteigt.

In dieser Grenzschicht spielt wegen des starken Geschwindigkeitsgefälles die Reibung eine wesentliche Rolle. Von ihr hängt es ab, wie weit sich der die Geschwindigkeit vermindernde Einfluss der Wand in die Flüssigkeit hinein erstreckt. Die Reibung bedingt somit die Dicke der Grenzschicht. Die Reibung möge sehr klein sein im vorliegenden Fall. Dann wird auch die Dicke der Grenzschicht sehr gering.

Die Größenordnung der Dicke der Grenzschicht sei ε.



Die Platte liege in der $+x$-Achse und beginne im Koordinatenanfang. Die y-Achse sei $\perp$ zur Platte. Dann ist

$$\frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{1}{\varepsilon}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{1}{\varepsilon^2},$$

u, $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ haben normalen Wert.

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt dann $\frac{\partial v}{\partial y} \sim 1$ und durch Integration $v \sim \varepsilon$. 48
Die Glieder in der Grundgleichung erhalten dann folgende Größenordnung:

$$\begin{array}{cccccccc}
\rho(\frac{\partial u}{\partial t} & + u\frac{\partial u}{\partial x} & + v\frac{\partial u}{\partial y}) & = & -\frac{\partial p}{\partial x} & + \mu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) \\
1 & 1 \cdot 1 & \varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon} & = & 1 & 1 & \frac{1}{\varepsilon^2}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
\rho(\frac{\partial v}{\partial t} & + u\frac{\partial v}{\partial x} & + v\frac{\partial v}{\partial y}) & = & -\frac{\partial p}{\partial y} & + \mu(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} & + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}) \\
\varepsilon & 1 \cdot \varepsilon & \varepsilon \cdot 1 & = & & 1 & \frac{1}{\varepsilon}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\frac{\partial u}{\partial x} & + \frac{\partial v}{\partial y} & = 0 \\
1 & 1 &
\end{array}$$

Die Reibung gewinnt Einfluß wenn $\mu \sim \varepsilon^2$ ist. Dies liefert uns den Zusammenhang zwischen der Dicke der Grenzschicht und der Größe der Reibung. In der ersten Gleichung fällt dann $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ gegen die anderen Glieder weg. In der 2ten Gleichung bleibt allein stehen $\frac{\partial p}{\partial y} \sim \varepsilon$. Die Abhängigkeit des Drucks von y ist jedoch zu vernachlässigen, da in dem kleinen Raum der Grenzschicht die Integration von $\frac{\partial p}{\partial y}$ höchstens zu Druckunterschieden von der Größenordnung ε^2 geben kann, d. h. Druck und Druckgefälle $\frac{\partial p}{\partial x}$ sind von y unabhängig, werden also der Grenzschicht durch die äußere Strömung eingeprägt.

Obige Gleichungen reduzieren sich somit auf:

$$\rho(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

49 Die Grenzbedingungen sind:

für $y = 0$ ist $u = 0, v = 0$

für $y = \infty$ ist $u = \bar{u}$

Somit gelten die Gleichungen ganz allgemein für die Grenzschicht. Im vorliegenden Fall lassen sie sich aber noch weiter vereinfachen.

a) Die Strömung soll stationär sein, also $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$[.]

b) Entlang der Platte ist kein Druckgefälle vorhanden, also $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$.

Also erhalten wir schließlich die Gleichungen:[5]

$$\rho(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}) = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Grenzbedingungen:

für $y = 0$ ist $u = 0, v = 0$

für $y = \infty$ ist $u = \bar{u}$

Nach dem Prinzip der mechanischen Ähnlichkeit können wir unsere Gleichungen vereinfachen, wenn wir eine Ähnlichkeitstransformation kennen, welche Differentialgleichungen und Grenzbedingungen in sich überführt. Multiplizieren wir x, y, u, v, ψ mit den Faktoren $x_0, y_0, u_0, v_0, \psi_0$, so erhalten wir:

$$\frac{\rho u_0}{x_0} = \frac{\mu}{y_0^2}, \quad v_0 = \frac{u_0 y_0}{x_0}, \quad \psi_0 = u_0 y_0, \quad u_0 = \bar{u}$$

als Bedingungen dafür, dass erstens das Problem und seine Lösungen in sich übergeführt wird, und dass 2tens durch die Transformation $\rho, \mu, \bar{u} = 1$, geworden sind. Die 3 letzten Gleichungen bestimmen die Faktoren, die u, v, ψ bei der Ähnlichkeit-

50 stransformation annehmen. Die erste sagt aus, dass die gefundene Lösung des Problems in sich übergeht, wenn nur $\frac{\rho \bar{u} y_0^2}{\mu x_0} = 1$ ist, d. h. unter Rücksicht auf die Faktoren, die u, v, ψ annehmen, kann der Zustand nur von $\frac{\rho \bar{u} y^2}{\mu x}$ abhängen. Also

[5] Vgl. hierzu die ersten Arbeiten zur Grenzschichttheorie: Prandtl, 1905a und Blasius, 1907, S. 4ff.

u ist auf den Parabeln $\frac{y^2}{x} = const.$ konstant, ist somit nur Funktion von $\frac{y^2}{x}$. Wir führen deshalb folgende neuen Veränderlichen ein:

$$\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho\bar{u}}{\mu}}\frac{y}{\sqrt{x}}$$

$$\psi = \sqrt{\frac{\mu\bar{u}}{\rho}}\sqrt{x} \quad \zeta(\xi)$$

Dann geht die Differentialgleichung über in[6]

$$\zeta\zeta'' = \zeta'''$$

Grenzbedingungen:

für $\xi = 0$ ist $\zeta' = 0 \quad \zeta = 0$

für $\xi = \infty$ ist $\zeta' = 2$

Die neue Differentialgleichung lösen wir um $\zeta = 0$ durch Potenzentwicklung. Wir finden:

$$\zeta = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{c_n \alpha^{n+1}}{(3n+2)!}\xi^{3n+2}$$

$$c_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{3n-1}{3\nu} c_\nu c_{n-1-\nu}$$

Um $\zeta = \infty$ benutzen wir asymptotische Näherung.

Für $\xi = \infty$ ist $\zeta' = 2$, also $\zeta = 2\xi + const. = 2\eta$. 51

Wir setzen nun, um eine erste Korrektion zu berechnen

$$\zeta = 2\eta + \zeta_1, \quad \zeta_1 \quad \text{sei klein gegen} \quad 2\eta$$

und erhalten unter Vernachlässigung der Quadrate der Korrektionen

$$2\eta\zeta_1'' = -\zeta_1'''$$

also

$$\zeta_1'' = \gamma e^{-\eta^2}$$

also

$$\zeta_1' = \gamma \int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta$$

also

$$\zeta_1 = \gamma \int_\infty^\eta d\eta \int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta = \gamma\eta \int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta + \frac{\gamma}{2} e^{-\eta^2}$$

---

[6] Blasius, 1907, S. 8.

Zur Berechnung weiterer Glieder der asymptotischen Näherung verfährt man im allgemeinen so, dass man ersteren kleine Korrektionen ζ_n hinzufügt und ihre Quadrate vernachlässigt. Man erhält so lineare Differentialgleichungen für die ζ_n, deren linke homogene Seite stets die gleiche ist, während rechts als eingeprägte Kraft der Fehler erscheint, den die Summe der vorhergehenden Näherungen, in die Differentialgleichung eingesetzt, übrig lassen.

Literatur:

Lamb, Hydrodynamics. Cambridge 1906.
M. Brillouin, Leçons sur la viscosité. Paris 1907.
H. Blasius, Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung.
Dissertation. Göttingen 1907.
Föppl, Technische Mechanik, B. III. IV. V. besonders B. III. S. 303 ...

Ad. Steichen.

8 Grenzschichten und Ablösung von Wirbeln

8. Sitzung. 8. I. 1908

52

Im vorhergehenden Vortrage hatten wir über die Reibung folgende zwei Hauptannahmen gemacht:

1. Die innere Reibung ist klein.
2. Die Flüssigkeit haftet an den Wänden.

Für die Bewegung in der Grenzschicht hatten wir die Gleichungen gefunden:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{k}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

und die Grenzbedingungen: für $y = 0$ wird $\begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases}$

für $y = \infty$ wird $\begin{cases} u = \bar{u} \\ v = \bar{v} \end{cases}$



Als Koordinaten wählen wir x parallel der Wand, y normal dazu. Dass wir die Gleichungen ungeändert auf dieses krumme System anwenden, bedeutet, dass wir die Zentrifugalkraft vernachlässigen. Die Dicke der Grenzschicht ist $\delta = \sqrt{\frac{kl}{\rho u}}$.

Um eine Anschauung von der Dicke der Grenzschicht bei einer Wasserturbine zu erhalten setzen wir

53

$$k = 1.15 \cdot 10^{-4} \, \frac{\text{kg sec}}{\text{m}^2}$$

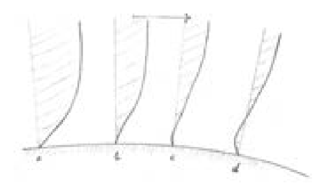
$$\rho = 101.9 \, \frac{\text{kg sec}}{\text{m}^3}$$

$$\mu = 10 \, \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

$$l = 0.5 \, \text{m}$$

dann erhalten wir $\delta = 0.24$ mm.

Beim Ausströmen von Dampf aus einer Düse erhalten wir $\delta = 0.05$ mm. Bei diesen beiden praktischen Fällen ist also die Grenzschicht sehr klein.

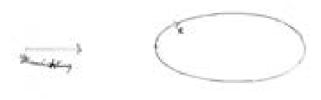


Wir wollen jetzt die Strömung an einer festen Wand vorbei betrachten. In der Richtung des Pfeiles soll Druckzunahme, also Geschwindigkeitsabnahme herrschen. Zeichnen wir in den Punkten *abcd* die Geschwindigkeitsprofile, so erhalten wir die dargestellte Figur. Da die Flüssigkeit in der Nähe der Wand verzögert wird, wird dort die Geschwindigkeit eher Null unterschreiten als weiter draußen. Wir erhalten also bei c und d eine Rückströmung; diese staut in der Nähe

54

von b Flüssigkeit an, die von der vorwärts strömenden Flüssigkeit in Form von Wirbeln fortgetragen wird. So bildet sich eine Wirbelkette, die von der Wand in die Flüssigkeit hinausragt. Der Punkt wo diese Kette die Wand trifft ist gegeben durch die Bedingung

$$\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]_{y=0} = 0\,.$$



Als ein Beispiel für die rechnerische Durchführung des Vorganges wollen wir eine stationäre Strömung annehmen, und in ihr einen zur Stromrichtung symmetrischen Körper.

Die Differentialgleichungen heißen jetzt[1]

$$\text{Gleichungen}\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} = \bar{u}\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \dfrac{k}{\rho}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Wegen der Symmetrie können wir den Ansatz machen:

$$\text{Ansatz}\begin{cases} \bar{u} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} q_n x^{2n+1} \\ \psi = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \chi_n x^{2n+1} \end{cases}$$

55

wo die χ_n Funktionen von y sind.

[1] Blasius, 1907, S. 16.

Dazu haben wir die Grenzbedingungen:

$$\text{Grenzbedingungen}\begin{cases} \text{für } y = 0 \text{ wird } u = 0, \text{ also } \dfrac{\partial \chi}{\partial y} = 0 \\ \text{für } y = 0 \text{ wird } v = 0, \text{ also } \chi = 0 \\ \text{für } y = \infty \text{ wird } u = \bar{u}, \text{ also } \dfrac{\partial \chi_n}{\partial y} = q_n \\ \text{für } y = 0 \text{ wird } \psi = 0 \end{cases}$$

Für die weitere Rechnung nehmen wir von den unendlichen Summen nur die ersten beiden Glieder und vernachlässigen die übrigen; wir setzen also

$$\bar{u} = q_0 x + q_1 x^3$$
$$\psi = \chi_0 x + \chi_1 x^3 .$$

Durch Einsetzen in die Gleichungen erhalten wir die Differentialgleichungen

$$\chi_0'^2 - \chi_0 \chi_0'' = q_0^2 + \frac{k}{\rho} \chi_0'''$$
$$4\chi_0' \chi_1' - \chi_0 \chi_1'' - 3\chi_1 \chi_0'' = 4 q_1 q_0 + \frac{k}{\rho} \chi_1''' ,$$

wo χ' für $\frac{\partial \chi}{\partial y}$ gesetzt ist. Zur Vereinfachung führen wir für die Variablen x, y, χ_0, χ_1 folgende ein:

$$\xi = \sqrt{\frac{q_1}{q_0}} x, \quad \eta = \sqrt{\frac{q_0 \rho}{2k}} y, \quad \zeta_0 = \sqrt{\frac{2\rho}{k q_0}} \chi_0, \quad \zeta_1 = \sqrt{\frac{2\rho q_0}{k q_1^2}} \chi_1 ;$$

dann erfüllen ζ_0 und ζ_1 als Funktionen von η die folgenden Gleichungen: 56

$$\zeta_0'^2 - \zeta_0 \zeta_0'' = 4 + \zeta_0'''$$
$$4\zeta_0' \zeta_1' - 3\zeta_0'' \zeta_1 - \zeta_0 \zeta_1'' = 16 + \zeta_1''' .$$

Dazu erhalten wir wieder Grenzbedingungen für $\eta = 0$ und $\eta = \infty$. Für ζ_0 und ζ_1 machen wir Potenzreihenansätze, deren Koeffizienten sich sukzessive bestimmen lassen (das Nähere siehe Blasius S. 17ff.).

Die Abszisse des Ablösungspunktes, wo die Wirbelkette die Wand trifft, wird $x_a = 0.65\sqrt{\frac{q_0}{q_1}}$.[2] Beim Kreiszylinder ist $x_a = 1.97R$, wo R der Radius des Zylinders ist. Der Ablösungspunkt liegt also in diesem Falle 113° hinter dem Punkt, wo sich die Strömung teilt.

[2] Vgl. Blasius, 1907, S. 35.

Literatur:

Prandtl, Vortrag auf der Mathematikerversammlung in Heidelberg 1904.

Blasius, Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung;
Dissertation, Göttingen 1907.

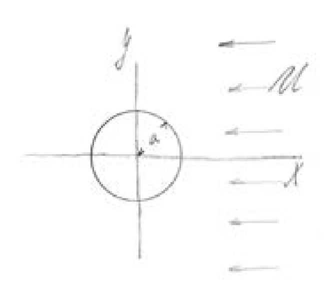
H. Koch.

9 Grenzschichten und Ablösung von Wirbeln. Fortsetzung

9. Sitzung. 15. I. 1908

57

Im folgenden soll der Fall betrachtet werden, dass sich ein Kreiszylinder in einer gleichförmig beschleunigten Flüssigkeitsströmung befindet.[1] Der Radius des Zylinders sei a, die Strömung erfolge mit der Beschleunigung V, so dass also die Geschwindigkeit der ungestörten Strömung $U = Vt$ ist.

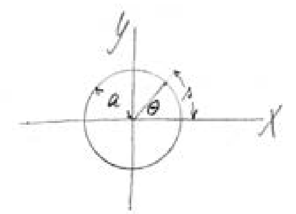


Wir wollen wieder die innere Reibung der Flüssigkeit als klein annehmen, so dass sich ihre Wirkung auf eine dünne Schicht an der Zylinderoberfläche beschränkt, während außerhalb derselben Potentialströmung herrscht.

Für diese gilt dann die Gleichung

$$1) \qquad \frac{p}{\rho} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2}\bar{u}^2 + F(t)$$

Hierin ist Φ das Potential für die Strömung um den Zylinder, $\bar{u}$ der Momentanwert der Geschwindigkeit, die sich aus Φ ableiten lässt.



Es ist:

58

$$\Phi = Ux(1 + \frac{a^2}{r^2}) = Vtx(1 + \frac{a^2}{r^2})$$

$$\Phi_{r=a} = 2Vtx = 2Vtr\cos\Theta$$

$$\bar{u} = -\frac{\partial \Phi}{\partial s} = 2Vt\sin\Theta = 2Vt\frac{y}{r}$$

[1] Für das Folgende vgl. Blasius, 1907, S. 28ff.

Hieraus bestimmt sich der an der Zylinderoberfläche herrschende Druck. Das Glied $F(t)$ läßt sich noch näher dadurch bestimmen, dass für $r = \infty$ die Druckverteilung in die der ungestörten Strömung übergehen muss. Für diese ist

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{dU}{dx} = \rho V$$
$$\frac{p}{\rho} = Vx + f(t)$$

$r = \infty$:

$$\Phi = Vtx$$
$$\bar{u} = U$$

Setzen wir dies in die Gleichung für $\frac{p}{\rho}$ ein, so ergibt sich:

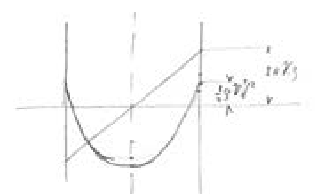
$$\frac{p}{\rho} = Vx - \frac{1}{2}U^2 + F(t) = Vx + f(t)$$

Unter Berücksichtigung hiervon ergibt sich dann für die Druckverteilung an der Zylinderoberfläche die Gleichung:

$$p = \rho \left(2Vx - \frac{1}{2}V^2t^2(1 - 4\frac{y^2}{r^2}) + f(t) \right)$$

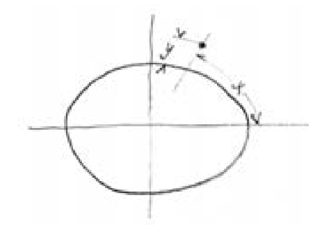
Das Glied $f(t)$ ist für die relative Druckverteilung ohne Belang, da es für alle Punkte konstant ist.

59 Denken wir uns den Zylinder auf eine Ebene projiziert, so stellt sich das erste Glied, das der Beschleunigung entspricht, als eine Gerade dar, das zweite dagegen als eine Parabel mit senkrechter Achse. Während das erste Glied konstant ist, nimmt das zweite mit dem Quadrat der Zeit zu.



Während also zu Anfang der Bewegung ($t = 0$) auf der Rückseite des Zylinders negativer Druck herrschte, wird dieser nachher positiv und steigt immer mehr an entsprechend dem Überwiegen des zweiten Gliedes in der Klammer. Das um den Zylinder strömende Wasser muss nun diesen erhöhten Druck überwinden, in der dünnen Grenzschicht an der Körperoberfläche ist aber durch die Reibung seine Geschwindigkeit vermindert, und schließlich reicht seine kinetische Energie zur Überwindung des Überdruckes nicht mehr aus, der Flüssigkeitsstrom weicht dem Gebiet des erhöhten Druckes seitlich aus, löst sich von der Wand ab und bildet einen Wirbel, der sich von der Ablösungsstelle in die freie Strömung hinein erstreckt.

Für die Betrachtung der Vorgänge in der Grenzschicht wollen wir zunächst von der Annahme eines Kreiszylinders absehen und nur einen zur Stromrichtung symmetrischen allgemeinen Zylinder voraussetzen. Außerdem wollen wir krummlinige Koordinaten einführen, die sich der Form des Zylinders anpassen, und wollen mit x die Koordinate in Richtung des Zylinderumfanges, mit y die normal zu ihm bezeichnen. 60



Die Geschwindigkeit der äußeren Potentialströmung ist proportional der Zeit und eine Funktion von x, wir setzen deshalb

$$\bar{u} = tw(x)$$

Für die Strömung innerhalb der Grenzschicht gilt nun (cf. S. 52) folgende Differentialgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

wobei $\kappa = \frac{k}{\rho}$ (k Reibungskoefficient, ρ Dichte).

Das Druckgefälle in der Grenzschicht ist durch die äußere Potentialströmung gegeben, es ist:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial u}{\partial x}$$

oder, wenn man den Wert von $\bar{u}$ einführt:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = w + t^2 w\frac{\partial w}{\partial x}$$

Hiermit geht die Gleichung über in: 61

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Außerdem ist noch die Kontinuitätsgleichung zu befriedigen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

(u ist die Geschwindigkeitskomponente in der x-Richtung, v die in der y-Richtung.)

Zur Integration der Kontinuitätsgleichung führen wir nun eine Stromfunktion Ψ ein und machen für sie den Ansatz

$$\Psi = 2\sqrt{\kappa t}\sum_{\nu=0}^{\infty} t^{2\nu+1}\chi_{2\nu+1}(x,\eta)$$

$\eta = \frac{y}{2\sqrt{\kappa t}}$ ist eine reduzierte Koordinate, die eingeführt ist um zu berücksichtigen, dass derselbe Zustand für das doppelte y in der vierfachen Zeit eintritt. Es wird dann:

$$u = \frac{\partial\Psi}{\partial y} = \sum_{\nu=0}^{\infty} t^{2\nu+1}\frac{\partial\chi_{2\nu+1}}{\partial\eta}$$
$$v = -\frac{\partial\Psi}{\partial y} = -\sum_{\nu=0}^{\infty} t^{2\nu+1}\frac{\partial\chi_{2\nu+1}}{\partial x}2\sqrt{\kappa t}$$

Grenzbedingungen:

$$y = b: \qquad u = 0, v = 0$$
$$y = \infty: \qquad u = \bar{u}, v = 0\,.$$

62 Um die Rechnung nicht allzu kompliziert zu gestalten, berücksichtigen wir nur die ersten beiden Glieder der Reihe und setzen

$$\chi_1 = w\zeta_1(\eta) \qquad \chi_3 = w\frac{\partial w}{\partial x}\zeta_3(\eta)$$

dann wird

$$\Psi = 2\sqrt{\kappa}t^{\frac{3}{2}}w(\zeta_1 + t\frac{\partial w}{\partial x}\zeta_3)$$

wo ζ_1 und ζ_3 nur Funktionen von η sind. Für ζ_1 und ζ_3 erhalten wir dann folgende Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial^3\zeta_1}{\partial\eta^3} + 2\eta\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial\eta^2} - 4\frac{\partial\zeta_1}{\partial\eta} = -4$$
$$\frac{\partial^3\zeta_3}{\partial\eta^3} + 2\eta\frac{\partial^2\zeta_3}{\partial\eta^2} - 12\frac{\partial\zeta_3}{\partial\eta} = -4 + 4[(\frac{\partial\zeta_1}{\partial\eta})^2 - \zeta_1\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial\eta^2}]$$

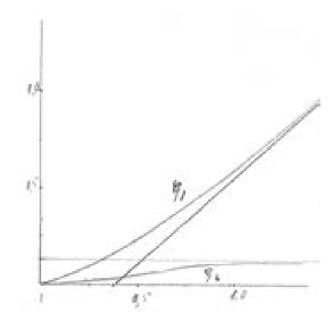
Die Lösungen müssen folgende Grenzbedingungen befriedigen:

$$\eta = 0: \qquad \left.\begin{array}{ll} \zeta_1 = 0 & \frac{\partial\zeta_1}{\partial\eta} = 0 \\ \zeta_3 = 0 & \frac{\partial\zeta_3}{\partial\eta} = 0 \end{array}\right\} \text{ aus } \begin{array}{l} u = 0 \\ v = 0 \end{array}$$

$$\eta = \infty : \qquad \frac{\partial \zeta_1}{\partial \eta} = 1 \qquad \frac{\partial \zeta_3}{\partial \eta} = 0 \quad \text{aus} \quad u = f(w)\,.$$

Die Lösung für ζ_1 heißt:

$$\zeta_1 = \eta + \frac{2}{3\sqrt{\pi}}[-1 + (1+\eta^2)e^{-\eta^2} + (3\eta + 2\eta^3)\int_\infty^\eta e^{-\eta^2} d\eta]$$



Der Verlauf der beiden Funktionen ist wie nebenstehend gezeichnet. Das Bemerkenswerte ist, dass sie ganz unabhängig von der Form des Körpers sind, so dass man also nur w zu kennen braucht, um mit ihrer Hilfe den ganzen Verlauf der Strömung bestimmen zu können. 63

Die Zeit, in welcher der Beginn der Ablösung eintritt (am hinteren Rand des Zylinders), ergibt sich aus der Bedingung (cf. S. 54), dass dann $\frac{\partial u}{\partial y}$ Null werden muß für $y = 0$.

Führen wir hier den Wert von u ein, so erhalten wir:

$$0 = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{t}{\kappa}}w\left[\frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial \eta^2} + t^2 \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 \zeta_3}{\partial \eta^2}\right]_{\eta=0}$$

Führen wir hier die Werte von $\frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial \eta^2}$ und $\frac{\partial^2 \zeta_3}{\partial \eta^2}$ ein, so erhalten wir für den Beginn der Ablösung:[2]

$$[t]^2 \frac{\partial w}{\partial x} = 2{,}34\,.$$

Hieraus ist also die Ablösungszeit zu bestimmen, wenn w und damit $\frac{\partial w}{\partial x}$ bekannt ist.

Im folgenden soll nun diese Methode auf die gleichförmig beschleunigte Strömung um den Kreiszylinder angewandt werden. Die Beschleunigung sei wieder V, dann ist: 64

$$\bar{u} = tw(x) = t \cdot 2V sin\Theta$$

also

$$w = 2V sin\Theta = 2V \sin\frac{x}{R}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2V}{R}\cos\Theta$$

[2] Blasius, 1907, S. 34.

Hiermit wird:

$$\Psi = 2\sqrt{\kappa}t^{\frac{3}{2}} \cdot 2V \sin\Theta(\zeta_1 + \frac{2Vt^2}{R}\cos\Theta\zeta_3)$$
$$u = 2Vt\sin\Theta\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial\eta} + \frac{2Vt^2}{R}\cos\Theta\frac{\partial\zeta_3}{\partial\eta}\right)$$

Die Ablösungszeit ergibt sich aus

$$[t]^2\frac{\partial w}{\partial x} = 2,34$$

für $\Theta = \pi$ zu

$$[t] = 1,08\sqrt{\frac{R}{V}}$$

unabhängig von Dichte und Reibungskoeffizient.

Auf den beigefügten Zeichnungen[3] sind nun für einen Kreiszylinder nach obiger Entwicklung die Stromlinien berechnet worden. Dabei ist

$$R = 10\,\text{cm}, \quad V = 0,1\frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}, \quad \kappa = \frac{k}{\rho} = 0,01\frac{\text{cm}^2}{\text{sec}}$$

65 angenommen worden. Für diese Verhältnisse ergibt sich die Ablösungszeit zu

$$[t] = 10,8\,\text{sec}$$

Die 4 Zeichnungen entsprechen dem Strömungszustand nach $\frac{[t]}{2}$, $[t]$, $1.5[t]$ und $2[t]$, also nach 5,4; 10,8; 16,2 und 21,6 sec.

Sie sind so entstanden, dass für diese angenommenen Zeiten für verschiedene Winkel Θ nach obiger Formel Ψ in Abhängigkeit von η (da ζ_1 und ζ_3 Funktionen von η sind) und hiermit also auch von y ermittelt wurde, dann ließen sich hieraus die Werte von y für konstantes Ψ für die verschiedenen Winkel Θ ermitteln.

Literatur:

Prandtl, Vortrag auf dem Mathematikerkongress in Heidelberg 1904
Blasius, Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung (Dissertation Göttingen 1907).

[3] Diese Zeichnungen sind nicht vorhanden.

Zu diesem und dem vorigen Vortrag ist noch zu bemerken, dass in den Entwicklungen immer nur die beiden ersten Glieder benutzt sind, dass also die Resultate eben nur angenähert richtig sind, aber doch ein gutes qualitatives Bild der Vorgänge geben. Insbesondere sind deshalb die Zeichnungen für die größeren Zeitwerte nur ein Annäherungsbild der Vorgänge, da ja die Theorie außerhalb der Grenzschicht Potentialströmung voraussetzt, während diese natürlich durch die Ablösung der Grenzschicht in Wirklichkeit gestört wird. 66

Es wurden dann noch Projektionsbilder gezeigt, welche photographische Aufnahmen von Wasserströmungen um Hindernisse wiedergaben. Siehe: Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft 1904 und 1905 (Ahlborn). [4]

G. Fuhrmann.

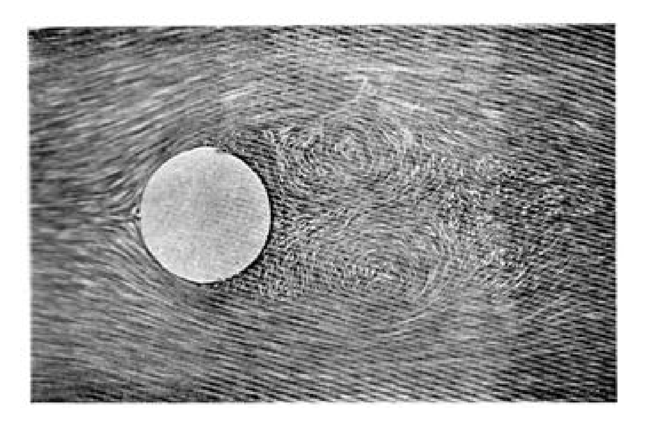


Abb. 9.1: Eine von zahlreichen Strömungsaufnahmen Friedrich Ahlborns über die Wirbelablösung hinter von Wasser umströmten Hindernissen. (Quelle: Ahlborn, 1905a, Fig. 16).

[4] Ahlborn, 1904 und Ahlborn, 1905a.

10 Turbulente Strömungen

11. Sitzung: 29. Januar 1908 und 12. Sitzung: 5. Februar 1908

67

1. *Problem*: Strömung des Wassers in Röhren und Kanälen. Bestimmung der Durchflussmenge bez. mittleren Geschwindigkeit als Funktion des Schwere- oder Druckgefälles [1]



$$J = g \sin i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

2. Die Lösung des Problems durch *Laminarbewegung* liefert bei kreisförmiger Röhre von Radius R die Geschwindigkeitsverteilung

$$u = 2u_m (1 - \frac{r^2}{R^2})$$

und den erforderlichen Druck:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{8ku_m}{R^2}.$$

3. *Experimente von Poiseuille* [2] bestätigen dies Widerstandsgesetz für Kapillarröhren, dagegen führt die Anwendung der Formel auf natürliche Flussläufe zu hundertfach größeren Geschwindigkeiten, als beobachtet werden.

4. Die *Hydraulik* [Encycl. IV. 20: Forchheimer] rechnet daher mit ganz anderen Widerstandsgesetzen: z. B. der Chézy'schen Formel:

$$J = \frac{bu_m^2}{R}$$

wobei J das Gefälle, R der „Profilradius“ = Querschnitt : benetzten Umfang, u_m die mittlere Geschwindigkeit, b eine Konstante ist. [3]

---

[1] Zur Definition des Gefälles J in der Hydraulik siehe Forchheimer, 1905, S. 334

[2] Poiseuille, 1840; siehe dazu Sutera u. Skalak, 1993 und Darrigol, 2005, Kap. 3.7.

[3] Forchheimer, 1905, S. 335.

68 **5.** Der Gültigkeitsbereich der beiden, sich widersprechenden Widerstandsgesetze wird von Reynolds durch Auffindung einer *kritischen Geschwindigkeitsgrenze* festgestellt.[4] Für kleine Geschwindigkeiten stellt sich die Laminarbewegung ein, die aber bei Erreichung der kritischen Geschwindigkeit instabil wird. Beobachtung von gefärbten Flüssigkeitsfaden zeigt, dass nach dieser Grenze der Zustand überhaupt nicht mehr stationär wird, sondern dass sich unregelmäßige *turbulente* Bewegungen über die mittlere Strömung überlagern. Der aus der Röhre ausfließende Strahl, bisher glatt und durchsichtig, wird jetzt rauh und fließt, besonders in der Nähe der kritischen Geschwindigkeit, stossweise aus.

6. Die Abhängigkeit der kritischen Geschwindigkeit von den Dimensionen der Röhre kann man durch *mechanische Ähnlichkeit* feststellen. Die Lösungen der hydrodynamischen Gleichungen nebst den Randbedingungen $u = 0 \quad v = 0$ gehen in neue Lösungen über, wenn

$$x \sim y \qquad u \sim v \qquad \rho u x \sim k \qquad p \sim \rho u^2$$

d. h. wenn alle linearen Dimensionen im gleichen Verhältnis vergrößert werden, alle Geschwindigkeiten im selben Verhältnis erhöht werden, u.s.w.

69 Da nun die Reynolds'sche Grenze[5] offenbar nur von der Weite der Röhre (y) und der Geschwindigkeit $u \parallel x$ abhängen kann, so muss die kritische Geschwindigkeit u proportional zu: $\sim k/\rho y$ sein. Reynolds findet für kreisförmige Röhren:

$$\frac{\rho u R}{k} = 1000\,.$$

Beispiel: $k/\rho = 0.018 \qquad R = 1$ cm $\qquad u = 18$ cm/sec.

7. Eine *andere Erklärung* – die in der Vorbesprechung zum Seminar erwähnt wurde – der Änderung des Widerstandsgesetzes: „dass wegen Erhöhung der Randkraft $k\frac{\partial u}{\partial y}$ mit wachsender Geschwindigkeit u_m schließlich die Grenzbedingung $u = 0$ versagt" würde ein anderes Ähnlichkeitsgesetz für die kritische Geschwindigkeit $\frac{ku}{R} = const$ bedingen. Innerhalb gewisser Grenzen wird aber obiges Gesetz durch Beobachtung bestätigt:

Engere Röhren vertragen eine viel größere Randkraft; die *Ursache der Turbulenz* ist daher im freien Innern der Röhre zu suchen.

---

[4] Reynolds, 1883; siehe dazu Darrigol, 2005, Kap. 6.5 und Jackson, 1995.

[5] Arnold Sommerfeld benannte sie kurz darauf „Reynolds'sche Zahl", Sommerfeld, 1909, S. 116, siehe dazu Rott, 1990.

8. Als zulässige Formen des *Widerstandsgesetzes* findet man aus der mechanischen Ähnlichkeit (s.o.)

$$J = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \sim \frac{u^2}{y} \cdot \text{Funktion von } \frac{\rho u y}{k}$$

Das Widerstandsgesetz der Laminarbewegung (**2**) erhält man hieraus als:

$$\frac{u^2}{y} \cdot \frac{k}{\rho u y},$$

die Chézy'sche Formel (**4**) ist

$$J \sim \frac{u^2}{y}.$$

Bessere Interpolationsformel gibt:[6]

$$J = \frac{u^2}{y}\left(\alpha + \beta\frac{k}{\rho u y}\right) = \beta\frac{k}{\rho}\frac{u}{y^2} + \alpha\frac{u^2}{y}.$$

9. Die turbulente Strömung braucht im Vergleich zur Laminarbewegung ein viel höheres Druckgefälle, daher muss auch die Randkraft, die mit diesem nach der Gleichung:

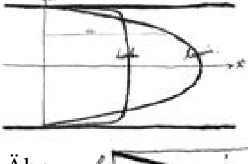
70



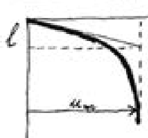
$$\int_{\text{Umfang}} k\frac{\partial u}{\partial y} ds = \iint_{\text{Querschnitt}} \frac{\partial p}{\partial x} do$$

im Gleichgewicht stehen muss, sehr groß sein.

Großes $\frac{\partial u}{\partial y}$ bedeutet aber, dass die mittlere Geschwindigkeit vom Rande aus sehr schnell erreicht wird, dass also im Vergleich zum parabolischen Profil der Laminarbewegung eine Abflachung des Profils und die Ausbildung einer *Grenzschicht* stattfindet.

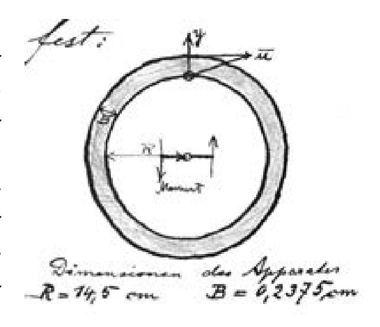


Aus der Angabe: $k\frac{\partial u}{\partial y} = 0{,}0025\rho u_m^2$ (vgl. mechanische Ähnlichkeit) folgt z. B. für $u_m = 300$ cm/sek als Dicke l der Grenzschicht: $l = 0{,}024$ cm.



[6] Vgl. dazu Forchheimer, 1905, S. 335.

10. *Beobachtungen von Couette*[7] stellen ebenfalls die Existenz einer Stabilitätsgrenze fest:



Sein Apparat besteht aus zwei koaxialen Zylindern, von denen der äußere mit der Geschwindigkeit $\bar{u}$ gedreht wird. In der Flüssigkeit, die den schmalen Kanal zwischen beiden erfüllt, stellt sich die Geschwindigkeitsverteilung: $u = \bar{u}\frac{y}{B}$ ein (lineares Geschwindigkeitsprofil). Gemessen wurde das Drehmoment, das der innere Zylinder durch die Randkraft $k\frac{\partial u}{\partial y}$ erfährt. Es ergab sich eine Änderung des Widerstandsgesetzes für die kritische Geschwindigkeit:[8]

71

$$\frac{\rho u B}{k} = 1100.$$

11. Als *Resultat* der vorgenannten experimentellen Tatsachen und der daran anschließenden Überlegungen finden wir, dass von einer gewissen Geschwindigkeit an die Laminarbewegung instabil wird (**5**). Für höhere Geschwindigkeiten treten turbulente, nicht gedämpfte Strömungen auf, die auf einen Ausgleich von Impuls und Energie benachbarter Schichten hinwirken (**9**). Sie haben einen erhöhten Verbrauch von Impuls ($\frac{\partial p}{\partial x}$) und dynamischer Energie ($\frac{\partial p}{\partial x} u_m$): teils für die Reibungswärme der turbulenten Strömung, teils für den starken Geschwindigkeitsabfall in der Grenzschicht zur Folge.



12. Die *Entstehungsursache* der Turbulenz haben wir in der Geschwindigkeitsdifferenz benachbarter Schichten zu suchen, etwa so, wie auch die Helmholtz'schen Grenzschichten instabil sind, weil (s. Fig.) einer Verlegung der Grenzschicht: an der konkaven Seite eine Verringerung der Geschwindigkeit, also Erhöhung des Drucks entspricht, der auf Vergrößerung der Einbiegung hinwirkt.

72

So entsteht auch die Turbulenz in einer Röhre wahrscheinlich weder in der Mitte ($r = 0$), wo keine Geschwindigkeitsdifferenzen sind, noch am Rande, wo durch die Grenzbedingungen $u = 0, v = 0$ das Wasser gewissermaßen

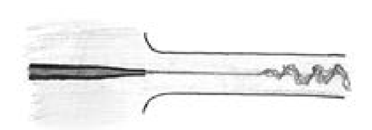
---

[7] Couette, 1890, Kap. I, S. 436–468.

[8] Gemeint ist die kritische Reynoldszahl; der von Blasius hier angegebene Wert findet sich nicht in Couette, 1890, der nur die grundsätzliche Übereinstimmung mit dem Reynolds'schen Ergebnis feststellt. Vgl. dazu auch die unabhängig davon und um dieselbe Zeit angestellten Experimente Arnulph Mallocks, des Assistenten von Lord Rayleigh, Mallock, 1896, und die Zusammenfassung der Couetteschen Experimente in Brillouin, 1907, S. 219–224. Zur Geschichte der „Taylor-Couette-Strömung" siehe Donnelly, 1991.

zwangsläufig geführt wird, sondern für mittlere Werte von r. Die Reibung wirkt, nachdem sie einmal das parabolische Profil hergestellt hat, höchstens dämpfend auf die Turbulenz, wie man schon daraus erkennt, dass wegen $\frac{\rho u R}{k} = 1000$ (**6**) Flüssigkeiten geringerer Reibung labiler sind als andere; die Ursache der Labilität ist offenbar, wie in obigem Beispiel, dynamischen Verhältnissen zuzuschreiben.[9]

13. Bei den Reynolds'schen Versuchen, bei denen ein gefärbter Flüssigkeitsfaden (**5**) den Eintritt der Turbulenz erkennen ließ, war im vorderen Teil der Röhre die Strömung noch glatt (s. Fig.). 73



Dies deutet in Übereinstimmung mit den bisherigen Überlegungen darauf hin, dass die Turbulenz erst eintritt, wenn die Grenzschichten, die bei Eintritt des Stromes in das konisch erweiterte Rohr entstehen, einige Ausdehnung erlangt haben, also etwa nahezu das parabolische Profil entstanden ist.

14. Die *Größenordnung* der turbulenten Zusatzgeschwindigkeiten: In „Lilienthal: Der Vogelflug" findet sich ein Diagramm, das den Wechsel der Windrichtung in einer Minute veranschaulicht.[10] Die Schwankungen betragen durchschnittlich $\pm 4°$, das *Verhältnis der turbulenten zur mittleren Bewegung* ist aber bei Luft ungefähr 1/15. Als Geschwindigkeits*verhältnis* ist diese Zahl bei Wasser dieselbe. Die *Schnelligkeit des Wechsels* war auf Lilienthals Kurve derart, dass sie 15 bis 20 Maxima in der Minute aufwies. Die *räumliche Ausdehnung* der Störungen ergibt sich aus der Größe der unregelmäßigen Wellen auf einem Flusslauf zu ca. 20 cm.

15. Die Fragen, die durch diese soeben erörterten Verhältnisse an die Hydrodynamik gestellt werden, sind: 74

I Erklärung der Instabilität.

II Darstellung der turbulenten Bewegung.

Unter II haben wir zwei verschiedene Antworten zu unterscheiden: a.) die reine Beschreibung der Hydraulik, b.) rationelle hydrodynamische Erklärungsversuche.

---

[9] Vgl. dazu Lamb, 1906, § 345, wo die seit 1880 unternommenen Anstrengungen von Lord Rayleigh und Lord Kelvin zur Frage der Stabilität behandelt werden; zur Geschichte siehe Darrigol, 2005, Kap. 5.5.

[10] Lilienthal, 1889, Tafel V, Fig. 3.

I Erklärung der Instabilität

16. H. A. Lorentz [H. A. Lorentz: Gesammelte Abhandlungen] [11] variiert die hydrodynamischen Gleichungen:

$$\rho(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + k\Delta u$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

für 2 Variable, und erhält:

$$\rho(\frac{d\delta u}{dt} + \delta u\frac{\partial u}{\partial x} + \delta v\frac{\partial u}{\partial y}) = -\frac{\partial \delta p}{\partial x} + k\Delta\delta u$$
$$\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial \delta v}{\partial y} = 0$$

Als Stabilitätskriterium benutzt er, dass die zeitliche Änderung der Energie der Zusatzbewegung negativ ist. Dieses Kriterium ist jedoch nur dann einwandfrei, wenn die Abnahme der Variationen im Stabilitätsfall monoton erfolgt. Beim Ein-
75 treten von Schwingungen kann die Energie sehr wohl monoton zunehmen, ohne dass von Instabilität zu reden ist. Lorentz erhält:

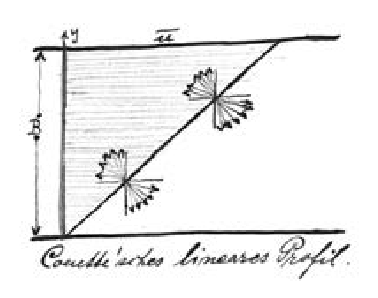
$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\rho(\delta u^2 + \delta v^2)\right] + \text{div (Energiestrom)} = \underbrace{-\rho\cdot\delta u\cdot\delta v\cdot\frac{\partial u}{\partial y}}_{\text{Für Laminarbewegung spezialisiert}} - \underbrace{\text{Reibungswärme}}_{\text{zu k proportional}}$$

Wesentlich negativ ist nur die Reibungswärme, die also stabilisierend wirkt (**12**). Andererseits sind die Variationen nicht unabhängig, sondern wegen Kontinuität und Grenzbedingungen beschränkt.

17. Den *„Energiestrom“* betrachtet Lorentz nicht, sondern eliminiert seinen Einfluss durch *Integration* über einen Bereich, an dessen Grenzen die Zusatzgeschwindigkeiten δu, δv und damit der Energiestrom verschwinden, also etwa über das Couette'sche Gefäß (**10**). Die Entstehungsursache der Turbulenz wird also im Innern gesucht, wenngleich man aus der Fig. in (**13**) ein Anwachsen der Störung längs der Röhre, also einem *wesentlichen* Einfluss des „Energiestromes“ ableiten könnte. Jedoch ist dies bei Couette (**10**) ausgeschlossen, und für die Reynolds'sche Beobachtung hatten wir in (**13**) eine andere Erklärung.

[11] Lorentz, 1907; dabei handelt es sich um die deutsche Übersetzung und Neubearbeitung von Lorentz, 1897.

18. Das Glied $-\rho\, \delta u\, \delta v\, \frac{\partial u}{\partial y}$ stammt her vom Impulsaustausch zwischen verschiedenen Schichten. 76



Es ist positiv, wenn durch positives/negatives δv geringere/höhere Impulse ρu in Schichten hineingetragen werden, in denen bereits negative/positive Zusatzgeschwindigkeit δu bestand.
$-\rho\, \delta u\, \delta v\, \frac{\partial u}{\partial y}$ ist also positiv für die in obigem Profil angedeuteten Richtungen. Je größer die Geschwindigkeitsdifferenzen sind, um so eher hat dies Glied Aussicht, das negative Reibungsglied zu überwiegen und so gemäß obigem Stabilitätskriterium Instabilität anzuzeigen.

19. Wegen der Kontinuität ist es unmöglich, eine Strömung zu konstruieren, die nur aus Elementen der obigen Richtung besteht; jedoch konstruiert H. A. Lorentz eine elliptische Zirkulation der Zusatzgeschwindigkeiten δu, δv, in der obige Richtungen vorwiegen, und bestimmt diese Zirkulation so, dass $\frac{d}{dt}$(Energie der Zusatzbewegung) möglichst groß wird.

Er erhält für die Couette'sche Anordnung als kritische Geschwindigkeit $\frac{\rho u B}{k} = 288$, also etwa 1/4 des experimentellen Wertes (**10**).

Reynolds hat durch ähnliche Rechnungen für die Röhre $\frac{\rho u R}{k} = 250$ erhalten, 77 also auch 1/4 des experimentellen Wertes (**6**). Beide finden also die Instabilität zu früh: Erklärung hierfür vgl. (**16**).[12]

II Darstellung der voll ausgebildeten Turbulenz.
a.) hydraulische Beschreibung.

20. Da die Turbulenz einen Austausch von Bewegungsgröße (**9**) (**11**) zwischen benachbarten Schichten nach Art der Reibung bewirkt, so erhöht Boussinesq [Boussinesq: Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides. Paris 1897.] einfach die Reibungskonstante, die er sich etwa der Intensität der turbulenten Bewegung entsprechend denkt.[13] Es besteht die Möglichkeit, dass ε mit dem Orte variiert, und so lautet die veränderte Grundgleichung schließlich:[14]

---

[12] Zur Problematik der „Energiemethode" siehe auch Tollmien, 1931, S. 294–302.

[13] Boussinesq, 1877, 1897. Bereits bei seiner Hydrodynamikvorlesung vom Wintersemester 1899/1900 ging Klein auf Boussinesqs Arbeit ein, „in welcher die Erscheinung der Turbulenz mit den hydrodynamischen Gleichungen in gewissen Einklang gebracht wird." Wieghardt-Ausarbeitung, S. 327–328.

[14] Die Gleichung taucht bei Boussinesq nicht in dieser Form auf. Zu Boussinesqs eigener Darstellung siehe Schmitt, 2007.

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(2\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right]\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon\left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right]\right)$$

ε muss hier unter dem ersten Differentialzeichen stehen, sofern man die Vorstellungen von den Reibungs*spannungen* sowie die *Existenz eines Impulssatzes* aufrecht erhalten will.

Für verschiedene Anordnungen ist ε als Funktion des Ortes u. a. bei Hahn-Herglotz-Schwarzschild Ztschr. f. Math. u. Phys. 51. 1904 [15] bestimmt aus Bazin'schen Versuchen. [16]

78 **21. b.) hydrodynamische Ansätze.**

Eine Ableitung der Boussinesq'schen Gleichung versuchen Hahn-Herglotz-Schwarzschild l.c.: [17]

In die hydrodynamischen Gleichungen, die sich als Impulsbilanz in der Form:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + k\Delta u$$

schreiben lassen, wird:

$$u = \bar{u} + u' \qquad v = \bar{v} + v'$$

eingesetzt, wobei $\bar{u}, \bar{v}$ den zeitlichen Mittelwert bedeutet: es ist also $\overline{u'} = 0, \overline{v'} = 0$. Wir erhalten:

$$\frac{\partial \rho \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{u}^2 + \rho \overline{u'^2})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \bar{u}\bar{v} + \rho \overline{u'v'})}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + k\Delta \bar{u}$$

In den Gliedern des konvektiven Impulstransportes haben wir also einen Einfluss der turbulenten Bewegung erhalten. In der Tat bedeutet $\rho u \cdot u$ die in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit $\perp x$ konvektiv getragene Impulsmenge. Ist nun eine „Streuung" der Geschwindigkeit u um eine mittlere Geschwindigkeit $\bar{u}$ vorhanden, so werden die *stärkeren* Impulse *gleichzeitig schneller* übertragen, so dass sich ein stärkerer Impulstransport, als dem Impulsmittel entspricht, ergibt. 79

22. Gleichungen für $\overline{u'^2}, \overline{u'v'}$ müssten nunmehr durch weitere Analyse der Gleichungen gewonnen werden, hierbei treten jedoch weitere Mittelwerte

---

[15] Hahn u. a., 1904. Diese Publikation ging aus den Beiträgen von Hans Hahn, Gustav Herglotz und Karl Schwarzschild zum Kleinschen Hydrodynamikseminar des Wintersemesters 1903/04 hervor, siehe http://www.uni-math.gwdg.de/aufzeichnungen/klein-scans/klein/V20-1903-1904/V20-1903-1904.html.

[16] Bazin, 1896.

[17] Hahn u. a., 1904, S. 414.

$\overline{u'\frac{\partial p'}{\partial x}}, \overline{u'\frac{\partial p'}{\partial y} + v'\frac{\partial p'}{\partial x}}$ u. a. auf, deren Bestimmung nicht gelingt. Ich versuchte u. a. diese Größe p' durch Rotationsbildung, d. h. durch Bildung der Gleichungen für die Wirbelkomponenten von u' v' w', zu eliminieren, doch gelang auch dieses nicht. –

In der genannten Arbeit macht eine gastheoretische Analogie die Möglichkeit des gewünschten Resultates plausibel.

23. Um zur Ergänzung der Boussinesq'schen Gleichungen (**20**), die ja eine neue Unbekannte ε einführen, eine neue Gleichung zu gewinnen, benutzen Hahn-Herglotz-Schwarzschild die Forderung, dass die in die Energiebilanz eintretende „Reibungswärme"

$$\varepsilon\left[(\frac{\partial u}{\partial y})^2 + (\frac{\partial u}{\partial z})^2\right],$$

weil sie ja nicht wirklich Wärme sei, als Energiestrom abfließen muss. In Analogie zur Wärmeleitung wird dieser Strom dem Gefälle der Intensität der turbulenten Bewegung (Temperatur!), also (**20**) dem Gefälle von ε proportional gesetzt, wobei die Leitfähigkeit selbst wieder, wie in der Wärmeleitung der Temperatur, so hier zu ε proportional gesetzt wird. Wir erhalten so: 80

$$\varepsilon\left(\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right]^2 + \left[\frac{\partial u}{\partial z}\right]^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\varepsilon\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\varepsilon\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\right) = 0$$

Eine Randbedingung:

$$\lambda\varepsilon\frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = \psi(u_0)$$

sorgt für den Abfluss der Energie in die Grenzschicht (**9**), die selbst von diesen Entwicklungen nicht umfasst wird. – Übereinstimmung dieser Theorie mit den Beobachtungen ist nicht zu erzielen.

24. H. A. Lorentz benutzt als Kriterium der vollen Ausbildung der Turbulenz die Energiebilanz für u' v' w' und kommt auf ähnliche Rechnungen wie oben. (**16ff**).

25. Die Zerlegung des Problems in die Bestimmung erst von $\bar{u}$, dann von u' ist nicht glücklich, da die Gleichungen sehr umfänglich werden; besonders dadurch, dass gewisse Glieder $\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x}$... in beiden Gleichungen (**21, 22**) vorkommen. Besser scheint mir die Aufsuchung einer nicht stationären Lösung u, v, w, von der man ja nachträglich die Mittelwerte bilden und die Stabilität beweisen kann. 81

Ein Ansatz hierfür ist:

$$u = \bar{u}(y) + f(y)\sin(\xi x + \tau t + h(y))$$
$$v = g_1(y)\cos(\xi x + \tau t + h(y)) + g_2(y)\sin(\xi x + \tau t + h(y))$$

Unter Vernachlässigung quadratischer Glieder (**14**) erhält man nicht lineare simultane Differentialgleichungen für $f\, g_1\, g_2\, h$, $\bar{u}$ ist das lineare oder parabolische Profil. Auch dieser Ansatz ist bisher in der weiteren Durchführung gescheitert.

H. Blasius.

Allgemeine Literatur:

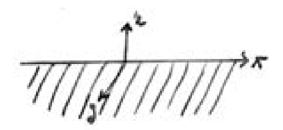
Lamb Hydrodynamics 3. Aufl. 1906. Seite 591 ff.[18]
Enzycl. IV 15 Love Hydrodynamik I.[19]
Brillouin Viscosité Paris 1907.[20]

[18] Lamb, 1906.
[19] Love, 1901b.
[20] Brillouin, 1907.

11 Über Schiffswellen

10. und 13. Sitzung. 22. Januar und 12. Februar [1908]

82



Die bisher vorliegende Theorie [Allgemeine Literatur: Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik (Leipzig 1907) § 234–243, 245, 251–253.] beschäftigt sich durchweg mit der Behandlung *unendlich kleiner, wirbelfreier Wellen in reibungsloser Flüssigkeit*; es sollen die Wellen dieser Art studiert werden, die die Bewegung eines Schiffes auf der horizontalen Oberfläche einer der Schwere unterworfenen Flüssigkeit hervorruft. Das Geschwindigkeitspotential φ dieser Bewegung genügt außer

$$(1) \qquad \Delta\varphi = 0$$

noch der Druckgleichung (wo ρ die Dichte):

$$(2) \qquad \frac{p}{\rho} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} - gz + const,$$

während die kinematische Oberflächenbedingung an der Oberfläche

$$z = \zeta(x, y, t)$$

unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung die Randbedingung ergibt:

$$(3) \qquad \frac{\partial\zeta}{\partial t} = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad \text{für} \quad z = 0\,.$$

Eine freie fortschreitende Welle, d. h. eine solche, für die an der Oberfläche $z = \zeta$ der Druck $p = const.$ ist, wird gemäß dieser Gleichungen durch

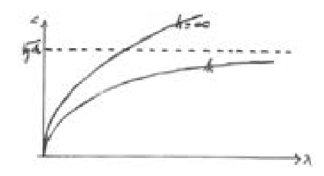
$$\zeta = a \sin k(x - ct)$$

gegeben; dabei ist in Wasser von endlicher Tiefe h (wo also φ noch weiterhin der Bedingung $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$ für $z = h$ zu genügen hat) die Geschwindigkeit c mit der Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ verknüpft durch die Relation:

$$c^2 = \frac{g}{k}\tanh(kh) = \frac{g\lambda}{2\pi}\tanh\frac{2\pi h}{\lambda}\,.$$

83 Mit wachsendem λ wächst c monoton und nähert sich asymptotisch der kritischen Geschwindigkeit $c = \sqrt{gh}$, jenseits derer keine fortschreitende Wellenbewegung mehr möglich ist. Bei unendlicher Tiefe $h = \infty$ wird

$$c^2 = \frac{g}{k} = \frac{g\lambda}{2\pi}$$



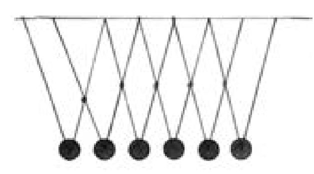
und es sind dann Wellen jeder Geschwindigkeit möglich; ist $\frac{k}{\lambda}$ klein, also für lange Wellen in flachem Wasser, so wird nahezu

$$c^2 = gh\,,$$

also von der Wellenlänge unabhängig.

I. Gruppengeschwindigkeit.

Vor der Behandlung der Schiffswellen ist eine Erörterung dieses wichtigen allgemeinen Begriffes nötig. Verfolgt man eine auf ruhigem Wasser sich fortpflanzende Gruppe von Wellen, und fasst man eine einfache bestimmte Phase, etwa einen Wellenbug ins Auge, so bemerkt man, dass dieser sich relativ zur Gruppe nach vorn zu bewegen scheint, hinten entsteht und vorn wieder verschwindet; man hat also eine kleinere Gruppengeschwindigkeit von einer größeren Wellen- oder Phasengeschwindigkeit – oben mit c bezeichnet, zu unterscheiden.



Eine gute Veranschaulichung dieser Erscheinung gibt eine Reihe nebeneinander aufgehängter schwerer Kugeln, deren Fäden in der angedeuteten Weise verknüpft sind, so dass sich die Schwingung einer jeden Kugel auf alle folgenden überträgt; die Wellenfortpflanzung verläuft hier, wie demonstriert wurde, ganz genau wie soeben für das Wasser geschildert.

1. Dynamische Erklärung.[1]

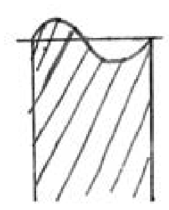
Zu einer Wellenbewegung – der Einfachheit halber nur für $h = \infty$ – von der Form

$$\zeta = a \sin k(x - ct), \qquad c^2 = \frac{g}{k}$$

84 gehört das Geschwindigkeitspotential:

$$\varphi = a \cos k(x - ct) \cdot c e^{kz}$$

[1] Lamb, 1907, § 235.



Die pro Breiteneinheit in der Wellenlänge λ des Zuges enthaltene potentielle Energie ist (bis auf eine Konstante):

$$\lambda V = g\rho \int_0^\lambda dx \int_0^\zeta dz \cdot z = \frac{1}{2} g\rho \int_0^\lambda \zeta^2 dx = \frac{1}{4} g\rho a^2 \lambda\,;$$

für die in demselben Raume des Zuges oben enthaltene kinetische Energie ergibt sich:

$$\lambda T = \frac{1}{2}\rho \int_0^\lambda dx \int_{-\infty}^0 dy \left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 \right) = \frac{1}{2}\rho \int_0^\lambda \left(\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=0} dx = \frac{1}{4} g\rho a^2 \lambda\,.$$

Die ganze Energie des Wellenzuges, nunmehr auf die Oberflächeneinheit berechnet, ist daher:

$$E = T + V = \frac{1}{2} g\rho a^2\,.$$

Nun ist die Arbeit, die vermöge der Wellenbewegung zur Zeit t an einem Streifen von der Breite 1 einer Vertikalebene, etwa $x = 0$, auf die rechts liegende Flüssigkeit geleistet wird:

$$A = -\int_{-\infty}^0 \left(p \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{x=0} dz = -\rho \int_{-\infty}^0 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) dz = \frac{1}{2} g\rho a^2 \sin^2 kct$$

und der Mittelwert dieser Arbeit pro Zeiteinheit ist

$$A = \frac{1}{4} g\rho a^2 \cdot c$$

Diese Arbeit kann nur dadurch übertragen werden, dass die Wellengruppen diese Stelle $x = 0$ passieren und ihre Energie E mit sich fortführen; ist U die Geschwindigkeit dieser Fortführung, d. i. eben die Gruppen- oder Energiegeschwindigkeit, so muss gerade $E \cdot U$ gleich der Arbeit pro Zeiteinheit sein, also

$$\frac{1}{2} g\rho a^2 U = \frac{1}{4} g\rho a^2 c\,,$$

und

$$U = \frac{1}{2} c\,,$$

d. h. *die Gruppengeschwindigkeit ist gleich der halben Phasengeschwindigkeit*.

Bei endlicher Tiefe h ergibt sich derselbe Ausdruck für E, aber

$$A = \frac{1}{4} g\rho a^2 c \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh}\right),$$

und daher

$$U = \frac{1}{2} c \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right).$$

Für kleine Wellenlängen ($k = \infty$) ist also U nahezu $\frac{1}{2}c$ und geht mit wachsender Wellenlänge asymptotisch in c über (vgl. Fig. pg. 83).

2. Kinematische Erklärung. [2]

Die Gruppengeschwindigkeit hat für jede Übereinanderlagerung reiner Sinusbewegungen auch einen rein kinematisch zu erfassenden Sinn. Eine Wellenbewegung $z = \zeta(x, t)$ besitze zu jeder Zeit t an der Stelle x eine bestimmte Phase, die mit bestimmter Geschwindigkeit $c = c(x, t)$ fortschreite (Phasengeschwindigkeit);



dann gehört ihr auch an dieser Stelle x_t zu dieser Zeit t eine bestimmte Wellenlänge $\lambda = \lambda(x, t)$ zu, definiert als Entfernung bis zur nächsten gleichen Phase. Die Gruppengeschwindigkeit U sei dann definiert als die Geschwindigkeit, mit der sich eine Welle bestimmter festgehaltener Länge fortpflanzt, d. h. λ soll konstant bleiben, wenn man t um dt, x um $dx = U dt$ ändert:

$$(1) \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial t} + U \frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0 .$$

Da sich jede Phase mit der Geschwindigkeit $c(x, t)$ fortpflanzt, haben die zur Zeit t an den Stellen x und $x + \lambda$ befindlichen gleichen Phasen zur Zeit $t + dt$ ihren Ort um $c(x, t)dt$ bzw. $c(x + \lambda, t)dt = cdt + \lambda \frac{\partial c}{\partial x} dt$ verschoben; also ist zur Zeit $t + dt$ die Wellenlänge vom Punkte $x + cdt$ an gemessen:

$$\lambda(x + cdt, t + dt) = \lambda(x, t) + \lambda \frac{\partial c}{\partial x} dt ,$$

und daher ist

$$(2) \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial t} + c \frac{\partial \lambda}{\partial x} = \lambda \frac{\partial c}{\partial x} .$$

Nehmen wir nun an, wie es bei den Wasserwellen ja der Fall [ist], dass c allein von λ abhängt, $c = c(\lambda)$, so folgt aus (1) und (2):

$$U = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda} = \frac{d(kc)}{dk} , \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} ,$$

was für $c^2 = \frac{g}{k} \tanh kh$ in der Tat gerade die vorhin angegeben Formeln ergibt.

[2] Lamb, 1907, § 234.

II. Kanalschiffswellen (Zweidimensionales Problem). 86

Die einfachste Behandlung des eigentlichen Problems der Schiffswellen basiert auf der Annahme, dass der Schiffskörper auf die Wasseroberfläche einen bekannten Druck ausübt. Betrachten wir zuerst das vereinfachte zweidimensionale Problem, wo alles von y unabhängig ist, d. h. denken wir etwa an ein in einem unendlich tiefen Kanal mit vertikalen Wänden bewegtes Schiff oder Balken, das von einer Wand zur anderen reicht, und möge dieses Schiff mit konstanter Geschwindigkeit v fortschreiten, so ist also eine Wellenbewegung zu bestimmen, wo der Oberflächendruck eine gegebene mit der Geschwindigkeit v fortschreitende Verteilung hat:

$$p = F(x - vt)\,.$$

1. Bewegung aus der Ruhe. Die Bewegung beginne zur Zeit $t = 0$, vorher sei Ruhe ($\zeta = 0$). An Stelle des ständig fortschreitenden Druckes denke man sich zu jeder Zeit t_0 dem Wasser einen Impuls von der Größe $F(x - vt_0)$ erteilt, d. h. man bestimme die den Anfangsbedingungen

$$\varphi = F(x - vt_0) \qquad \zeta = 0 \quad \text{für} \quad t = t_0$$

genügende Bewegung; diese wird (vgl. Lamb, § 237, pg. 453):

$$\varphi_0 = -\frac{cg}{\rho}\int_0^\infty \cos\sqrt{gk}(t - t_0)\cos k(x - vt_0)e^{kz}f(k)dk$$
$$\zeta_0 = -c\int_0^\infty \sqrt{gk}\sin\sqrt{gk}(t - t_0)\cos k(x - vt_0)f(k)dk$$

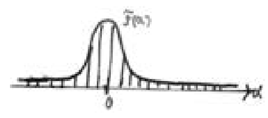
wo

$$f(k) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F(\alpha)\cos k\alpha d\alpha\,.$$

Die Superposition aller dieser in der Zeit von 0 bis t entstandenen Bewegungen:

$$\varphi = \int_0^\infty \varphi_0 dt_0 \qquad \zeta = \int_0^\infty \zeta_0 dt_0$$

genügt allen Bedingungen unseres Problems, da sie sämtlich linear sind – wie man durch direkte Rechnung bestätigen kann; wir haben also die gesuchte Lösung.



Die gegebene Druckverteilung sei so beschaffen, dass sie nur für kleine Werte von α von 0 verschieden sei, und dann rasch 0 werde. Dann stellt jedes einzelne ζ_0 eine Bewegung dar, die sich in immer länger und flacher werdenden Wellen von $x = vt_0$ an ausbreitet und schließlich näherungsweise wie

$$\frac{(t - t_0)^2}{(x - vt_0)^{5/2}}\cos\left(\frac{g(t - t_0)^2}{4(x - vt_0)} + \frac{\alpha}{2}\right)$$

87 verläuft (Lamb, loc. cit.). Man überlegt, dass von den mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortschreitenden Phasen diese Wellenzüge sich im wesentlichen nur die nicht zerstören werden, die mit der Geschwindigkeit v fortschreiten, und dass diese Wellengruppen die zu v gehörigen Längen $\lambda = \frac{2\pi v^2}{g}$ bilden werden. Da diese Gruppen sich nach den Ausführungen unter I nur mit der Geschwindigkeit $\frac{v}{2}$ fortbewegen, erscheint die von Lord Kelvin [„On ship waves"; Popular Lectures and Adresses, London 1891. Vol. III.] aufgestellte Behauptung plausibel, dass die erzeugten Wellengruppen hinter dem Schiff zurückbleiben und gerade die Hälfte des von ihm durchmessenen Raumes erfüllen.[3] Diese Erscheinung ließ sich übrigens genau an dem pag. 83 geschilderten Pendelmodell vorführen, wenn man die Kugeln der Reihe nach durch ein mit gleichförmiger Geschwindigkeit entlang geführtes Lineal in Bewegung setzte: der entstehende Wellenschwanz füllte immer einen bestimmten Bruchteil der durchlaufenen Strecke aus (nicht genau die Hälfte gemäß der veränderten Gruppengeschwindigkeit).

Um diese Betrachtungen streng zu gestalten, versuchte ich ein direktes Studium der angegeben Integrale für φ und ζ, wobei man etwa

$$\zeta = -c \int_0^\infty f(k)dk \left\{ \frac{\cos(\sqrt{gk}t + kx) - \cos k(x - vt)}{-\sqrt{gk} - vk} + \frac{\cos(\sqrt{gk}t - kx) - \cos k(x - vt)}{\sqrt{gk} - vk} \right\}$$

zu Grunde legen kann. Führt man hier $\xi = x - vt$ als Koordinate relativ in Bezug auf das bewegte Schiff ein, so kann man durch Abschätzung dieses Integrals in der Tat einiges über den Verlauf der Wellen erschließen. Insbesondere muss für $\xi > 0$ (also vor dem Schiff) ζ rasch Null werden, also wesentlich Ruhe herrschen, ferner müssen sich für negative ξ, die relativ klein in Bezug auf vt sind (also hinter dem Schiff) nahezu stationäre zur Geschwindigkeit v gehörige Wellen ausbilden, und endlich muss für große negative ξ der so entstandene Wellenschwanz wieder nahezu verschwinden. Über die Länge des Schwanzes gelang es bisher noch nicht, bestimmtes zu ermitteln.

Eine Veranschaulichung der Bewegung bieten die beigegebenen Zeichnungen, die durch Superposition der von Lord Kelvin [Proc. R. S. of Edinburgh 25, 1. pg. 191 = Philos. Mag. (6). – Vgl. Vortrag Schröder, pag. 35 dieses Heftes][4] für ζ_0 gezeichneten
88 Kurven entworfen sind. Sie unterscheiden sich nur dadurch von den vorangehenden Annahmen, dass zur Zeit t_0 statt des Impulses φ_0 eine von 0 verschiedene Erhebung ζ_0 gegeben ist. Die Kurven sind im Koordinatensystem der ξ gezeichnet und zwar zu den Zeiten $t = 0..5$ bzw. 0..4 für 2 verschiedenen Geschwindigkeiten; die Orte $\xi = -vt$ von $x = 0$ sind markiert. Man sieht deutlich die Entstehung des Wellenschwanzes.

[3] „The rear of the procession travels forwards at half the speed of the boat; the procession lengthens backwards relatively to the boat at half the speed of the boat." Thomson, 1891, S. 450–500, hier S. 466.

[4] Thomson, 1910, S. 338–350. Die Zeichnungen liegen dem Protokoll nicht bei.

2.) Stationäre Bewegung.
Weit einfacher ist die Frage nach der stationären Wellenbewegung zu beantworten, die unter sonst gleichen Annahmen entsteht, wenn sich das Schiff aus dem Unendlichen her bewegt; genau genommen ist die Bewegung stationär nur in Bezug auf ein mit dem Schiffe bewegtes Koordinatensystem (ξ); sonst ist sie nur von $x - vt$ abhängig.

Lord Kelvin [Lord Kelvin, Deep Water Ship-Waves. Proc. R. S. Edinb. 25, 1 (1905) pg. 562 ff = Phil. Mag. (6), 9. pg. 733.][5] hat dieses Problem sehr eingehend behandelt und die entstehenden Wellenformen diskutiert. Er geht von der Grundlösung

$$\zeta = \frac{a}{v} \cos k(x - vt)$$

aus, die zu dem Drucke

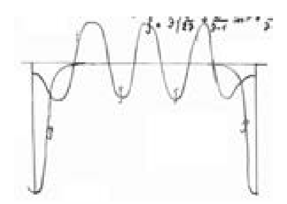
$$p = (g - kv^2)\zeta = \frac{a(g - kv^2)}{v} \cos k(x - vt)$$

gehört, und bildet durch Summation den zu dem Drucksystem

$$P = g \frac{\frac{1}{2}(1 - e^2)}{1 - 2e \cos \vartheta + e^2} = g(\frac{1}{2} + e \cos \vartheta + e^2 \cos 2\vartheta + ...) \quad \left(\vartheta = \frac{2\pi}{a}(x - vt)\right)$$

gehörigen Wellenzug

$$\zeta = J \left\{ \frac{1}{2J} + \frac{e}{J - 1} \cos \vartheta + \frac{e^2}{J - 2} \cos 2\vartheta + ... \right\} \quad \text{wo} \quad J = \frac{ga}{2\pi v^2}$$

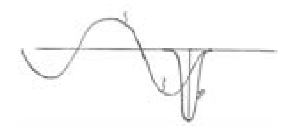


P besteht für $e = 0,9$ aus 2 sehr großen rasch abfallenden Erhebungen bei $\vartheta = 0$ und $\vartheta = 2\pi$ und ist dazwischen nahezu Null. Der Wellenzug ζ, den Kelvin für verschiedene Werte von v konstruiert hat (die Figuren wurden projiziert) hat für mittlere Werte von ϑ (etwa $\frac{\pi}{6} < \vartheta < \frac{5\pi}{6}$) sehr nahe die Form:

$$\bar{\zeta} = \pm\zeta(\pi) \sin J\vartheta \,,$$

sofern J gleich einer ganzen Zahl + $\frac{1}{2}$ ist, d. h. er hat wesentlich die Form von freien Wellen der Geschwindigkeit v. Ersetzt man also die periodische Druckverteilung F durch eine andere, die nur eine Erhebung (bei $\vartheta = 0$) mit F gemein hat und sonst durchweg Null ist, so wird ein Wellensystem hervorgerufen, das bei $\vartheta = 0$ mit ζ übereinstimmt und später in die freien Sinuswellen $\bar{\zeta}$ übergeht. 89

[5] Thomson, 1910, S. 368–393.



Überlagert man nun diesen Zug derart mit einem freien Wellensystem $-\bar{\zeta}$, dass sich beide in dem Druckpunkt in einiger Entfernung gegenseitig aufheben, so erhält man eine Lösung unseres Problems, die dem Fortschreiten des Drucksystemes über anfangs ruhiges Wasser entspricht und genau unser Problem löst; sie ist in der Figur skizziert und von Kelvin für verschiedene Geschwindigkeiten berechnet und gezeichnet (loc. cit. Fig. 18–20). Die Amplituden der den Wellenschwanz bildenden Sinuswellen wachsen mit wachsender Geschwindigkeit bis zu einem Maximum, um dann mit weiter wachsender Geschwindigkeit wieder bis Null abzunehmen (loc. cit. Fig. 17).[6]

In ähnlicher Weise kann man dasselbe Problem für endliche Tiefe h behandeln (vgl. z. B. Lamb, § 243).[7] Es ergibt sich da, falls $v < \sqrt{gh}$ (kritische Geschwindigkeit) ist, ein Resultat vom gleichen Typus: Unendlicher Wellenschwanz von Wellen der zu v gehörigen Länge. Ist aber $v > \sqrt{gh}$, so entstehen keine Wellen mehr, und nur in der Nähe des Druckpunktes hat die Wasseroberfläche eine merkliche Erhöhung. Nähert sich übrigens v dem Werte $\sqrt{gh}$ von unten, so wächst die Amplitude der Wellen unendlich, so dass die Annahme unendlich kleiner Wellen versagt.

90 **II. Dreidimensionales Problem.**

Wir betrachten hier nur den stationären Fall. Bewegt sich ein Schiff über eine zweidimensional ausgedehnte Oberfläche, so erzeugt es, wie *W. und R. E. Froude* zuerst beobachtet haben,[8] neben einem System transversaler, zur Bewegungsrichtung nahezu senkrechter Wellen, die es wie im Kanal hinter sich lässt, auch ein System vom Bug ausgehender divergierender quer zur Fortpflanzungsrichtung gestellter Wellen. Wächst die Geschwindigkeit bis zur kritischen $\sqrt{gh}$, so verschwinden die Transversalwellen, und es bleiben allein die divergierenden Wellen über, die sich mit wachsender Geschwindigkeit immer nahe gegen das Schiff neigen.

1.) Eine vollständige Theorie dieser Erscheinung hat neuerdings *W. V. Ekman* [„On the waves produced by a given distribution of pressure ...“. Arkiv för Mathematik, Astr. o. Physik. Bd. 3 (1907), Hälfte 2. Nr. 11.][9] gegeben: Eine gegebene Druckverteilung p werde mit gleichförmiger Geschwindigkeit v über die Wasseroberfläche bewegt, und es möge alles auf ein *mitbewegtes* Koordinatensystem x, y

---

[6] Thomson, 1910, S. 384–385.

[7] Lamb, 1907, § 243.

[8] Froude, 1877, 1881.

[9] Ekman, 1907.

bezogen werden. Der Druck p sei nur innerhalb eines kleinen den Nullpunkt umgebenden Gebietes C merklich von Null verschieden, und werde dargestellt durch:

$$p(x,y) = \frac{P}{\pi^2} \iint_0^\infty F(\mu,\nu) \cos\mu x \cos\nu y \, d\mu d\nu \,,$$

wo

$$F(\mu,\nu) = \frac{1}{P} \iint_{(C)} p(x,y) \cos\mu x \cos\nu y \, dx dy, \quad P = \iint_{(C)} p(x,y) dx dy \,.$$

Es ergibt sich leicht, dass man die durch diesen Druck hervorgerufene Wellenbewegung hinschreiben kann in der Form:

$$\zeta = \frac{P}{\rho\pi^2} \iint_0^\infty \frac{F(\mu,\nu)\cos\mu x \cos\nu y}{\frac{\mu^2\nu^2}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}\tanh h\sqrt{\mu^2+\nu^2}}} \, d\mu d\nu \,;$$

hierzu tritt noch additiv ein beliebiges System freier Wellen, das so bestimmt werden kann, dass vor dem Schiff das Wasser wesentlich in Ruhe ist.

Es gelingt nun Ekman, dieses Integral für Stellen, die vom Druckgebiete C hinreichend weit entfernt sind, approximativ auszuwerten.

Dabei erhält er, wenn wir zunächst $h = \infty$ setzen: 91

$$\zeta = -\frac{2P\sqrt{g}}{\rho\sqrt{\pi}v^3\sqrt{x}} \left(\frac{1}{Q_1} \sin\left[k(\rho_1 x - \sigma_1 y) + \frac{\pi}{4}\right] + \frac{1}{Q_2} \sin\left[k(\rho_2 x - \sigma_2 y) - \frac{\pi}{4}\right] \right),$$

wo $k = \frac{g}{x^2}$. Hierin bedeuten σ_1, σ_2 die Werte, für die die Ableitung der aus

$$\rho^4 = \rho^2 + \sigma^2$$

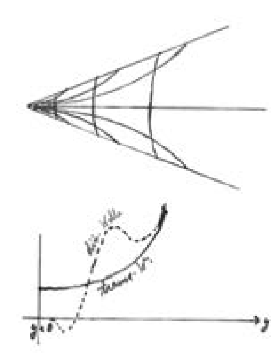
bestimmten Funktion $\rho = \rho(\sigma)$, $\frac{d\rho}{d\sigma} = \frac{y}{x}$ wird, und es ist $\rho_1 = \rho_1(\sigma)$, $\rho_2 = \rho_2(\sigma)$. Ferner sind gesetzt:

$$Q_{1,2} = \left(\pm\sqrt{\pm\frac{d^2\rho}{d\sigma^2} \cdot \frac{\partial\chi}{\partial\rho}} \right)_{\sigma=\sigma_{1,2},\, \rho=\rho_{1,2}},$$

wo

$$\chi(\rho,\sigma) = \frac{1}{F(\rho k, \sigma k)} \left(\frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+\sigma^2}} - 1 \right).$$

Da sich $\max \frac{d\rho}{d\sigma} = \tan(19°28')$ ergibt, bleibt das ganze Wellensystem in dem Winkel zwischen den beiden Geraden durch den Nullpunkt eingeschlossen, die diesen Winkel mit der x-Achse bilden.



Die Kurven gleicher Phase haben das nebenstehend skizzierte Aussehen, und zwar gibt der zweite Summand das divergierende, der erste das transversale Wellensystem. Auch den Verlauf der Wellenamplituden gestattet der obige Ausdruck zu übersehen; die Figur zeigt die Amplituden beider Wellen für konstantes x als Funktion von y. An den Grenzgeraden des Wellensystems werden beide Amplituden unendlich, so dass da unsere Approximation nicht mehr gilt. Mit wachsender Geschwindigkeit wächst die Amplitude an einer festen Stelle zunächst, um schließlich wie $\frac{1}{c^3}$ abzunehmen.

Für endliches h wird ebenso

$$\zeta = -\frac{2P}{g\rho\sqrt{\pi}\sqrt{h^3}\sqrt{x}}\left(\frac{1}{Q_1}\sin\left[\frac{1}{h}(\rho_1 x - \sigma_1 y) + \frac{\pi}{4}\right] + \frac{1}{Q_2}\sin\left[\frac{1}{h}(\rho_2 x - \sigma_2 y) - \frac{\pi}{4}\right]\right).$$

Q_1, Q_2 haben dieselbe Bedeutung, nur ist für χ zu setzen:

$$\chi = \frac{1}{F(\frac{\rho}{k}, \frac{\sigma}{k})}\left(\frac{s^2\rho^2}{\sqrt{\rho^2+\sigma^2}\tanh\sqrt{\rho^2+\sigma^2}} - 1\right),$$

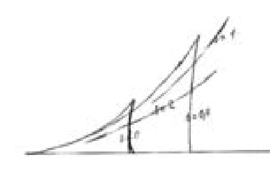
92 wo

$$s^2 = \frac{v^2}{gh}$$

und $\rho = \rho(\sigma)$ bestimmt sich aus

$$\sqrt{\rho^2+\sigma^2}\tanh\sqrt{\rho^2+\sigma^2} = s^2\rho^2 .$$

Nun gibt es eine oder 2 Stellen, für die $\frac{d\rho}{d\sigma} = \frac{y}{x}$ wird, je nachdem $s > 1$ oder $s < 1$ ist; nur im letzten Falle existieren also, wie oben angekündigt, beide Wellenzüge.



Die Gestalten der Wellenkämme für verschiedene s (von dem Phasenabstand an der Spitze abgesehen) sind nebenstehend nach der Ekmanschen Zeichnung skizziert. – Die beiden anderen Figuren geben Ansichten der Wellenamplitude in derselben Darstellung wie vorhin für je einen Fall, so $s < 1$ und $s > 1$.

2. Während alle bisher betrachteten Theorien das Schiff durch ein gegebenes Drucksystem ersetzen, hat J. H. Michell [„The Wave-Resistance of a ship." Phil. Mag. (5) 45. 1898. pg. 106.][10] den Ansatz genau für das eigentlich vorliegende Problem, ein im Wasser bewegtes Schiff gemacht. Ist das Koordinatensystem wieder

[10] Michell, 1898.

mit dem mit der Geschwindigkeit v fortschreitenden Schiff verbunden, so sei die eingetauchte Schiffsoberfläche durch die Gleichung

$$y = \eta(x,z)$$



gegeben, und die Annahme ist, dass dieses η mit seinen Ableitungen unendlich klein von der Ordnung der Wellenhöhe sei: also ein sehr schnelles Schiff das Wasser durchschneide. Das Geschwindigkeitspotential in Bezug auf das bewegte Koordinatensystem sei 93

$$\phi = -vx + \varphi(x,y,z)\,,$$

wo dann φ nur die unendlich kleine Wellenbewegung darstellt. Die Druckgleichung heißt dann mit den erlaubten Vernachlässigungen:

$$\frac{p}{\rho} = 2v\frac{\partial\varphi}{\partial x} - gz + const.$$

und sie ergibt an der freien Oberfläche $z = \zeta(x,y)$, wenn wir noch die kinematische Randbedingung (vgl. pg. 82, (2)) berücksichtigen:

$$(1) \qquad -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{v^2}{g}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \quad \text{für} \quad z = 0\,.$$

An der Bodenfläche $z = h$ muss die Randbedingung erfüllt sein:

$$(2) \qquad -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{für} \quad z = h\,.$$

Charakteristisch ist endlich, dass hierzu als drittes die kinematische Randbedingung für die Schiffsoberfläche $y = \eta(x,z)$ tritt, und zwar liefert sie mit den erlaubten Vernachlässigungen:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -v\frac{\partial\eta}{\partial x} \quad \text{für} \quad y = 0 \quad \text{im Schiff.}$$

An der Ebene $y = 0$ außerhalb des Schiffes muss aus Symmetriegründen $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$ sein, so dass wir schließlich in dieser ganzen Ebene

$$(3) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -vf(x,z) \quad \text{für} \quad y = 0$$

kennen. Michell löst nun durch Integraldarstellungen exakt das Problem eine Lösung von $\Delta\varphi = 0$ zu bestimmen, die die Randbedingungen (1), (2), (3) erfüllt.

Die resultierende Formel wird aber äußerst kompliziert, und lässt eine Diskussion der entstehenden Wellenform nicht zu. Sie erlaubt hingegen eine wichtige Anwendung auf die Bestimmung des Wellenwiderstandes des Schiffes. Der Druck, den vermöge der Wellenbewegung das Schiff auszuhalten hat, ist $\delta p = 2\rho v \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, und da an jeder Stelle die Schiffswand nahezu vertikal gerichtet ist, also in der Bewe-
94 gungsrichtung die Druckkomponente $\delta p \frac{\partial \eta}{\partial x}$ liegt, so wird der Widerstand, den das Schiff vermöge der Wellenbewegung zu überwinden hat:

$$R = -2 \iint \delta p \frac{\partial \eta}{\partial x} dx\, dz = -2\rho v \iint \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} dx\, dz\,.$$

Trägt man hierin die gefundene Lösung φ des Problems ein, so vereinfacht sich der Ausdruck bedeutend und man erhält:

$$R = \frac{4\rho g^2}{\pi v^2} \int_1^\infty (I^2 + J^2) \frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}$$

wo

$$I = \int_0^{-\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,z) e^{\lambda^2 gz/v^2} \cos \frac{\lambda g x}{v^2} dx\, dz$$
$$J = \int_0^{-\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,z) e^{\lambda^2 gz/v^2} \sin \frac{\lambda g x}{v^2} dx\, dz\,.$$

Diese Ausdrücke sind zur numerischen Berechnung von R verwendbar, die Michell an einem Beispiel ausführt. Weiterhin gestatten sie noch den allgemeinen Nachweis, dass mit wachsender Geschwindigkeit R bis zu einem Maximum wächst, um dann mit unendlicher Geschwindigkeit Null zu werden.

Betrachtet man nur den Teil des Widerstandes, der von 2 Elementen σ, σ' des Schiffes herrührt, die um ϑ, ϑ' gegen die x-Achse geneigt sind, so erhält man:

$$\frac{8g\rho\sigma\sigma'\vartheta\vartheta'}{\sqrt{l(x-x')}} \sin \pi \left(\frac{1}{4} - \frac{2(x-x')}{l} \right) e^{2\pi \frac{z+z'}{l}}, \quad \text{wo} \quad l = \frac{2\pi v^2}{g}$$

Dies nimmt mit wachsender Entfernung $x - x'$ der beiden Elemente bzw. mit wachsender Geschwindigkeit oszillierend ab und zu, wie es den Beobachtungen von W. und R. E. Froude entspricht.

[E. Hellinger]

12 Theorie der Schiffspropeller

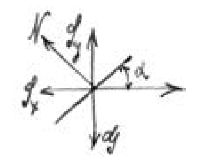
14. und 15. Sitzung am 19. und 26. Februar 1908 95

Literatur:
hauptsächlich Transactions of naval architects
(Arbeiten von Rankine, Cotterill, Froude jun.);[1]
Durand, resistance and propulsion of ships;[2]
Riehn, Kolleg über Schiffbau.[3]

1.) Widerstandsgesetze einer ebenen Fläche, die unter dem Winkel α mit ihrer Ebene durch die Flüssigkeit bewegt wird.[4] Der Normaldruck wird gesetzt von

Newton	proportional	$\sin^2 \alpha$	(theoretisch)
v. Lössl	″	$\sin \alpha$	(theoretisch und experimentell)
Langley	″	$\sin \alpha / 1+\sin^2 \alpha$	(experimentell)
Rayleigh	″	$(4+\pi) \sin \alpha / 4+\pi \sin \alpha$	(theoretisch)
Kelvin	″	$\sin \alpha \cos \alpha$ für kleine α	(experimentell)
Eiffel	″	α bis 30°, const. 30° bis 90°	(experimentell)

Auf gekrümmte Flächen ist der Normaldruck, besonders nach Lilienthal 2 bis 5 mal so groß wie auf ebene, solange α klein ist.[5]



2.) Theorie der Gleitflieger hinsichtlich des Energiebedarfs. Nimmt man das v. Lössl'sche Gesetz als korrekt genug an, dann ist der Normaldruck der mit der Geschwindigkeit v bewegten 96
Fläche F:[6]

$$N = \frac{\gamma}{g} F v^2 \sin \alpha$$

---

1 Rankine, 1865, Cotterill, 1879, Froude, 1886 and Froude, 1889.

2 Durand, 1898.

3 Riehn, 1882.

4 Vgl. den Beitrag Theodore von Kármáns, S. 17 sowie von Lössl, 1896, Langley, 1891, Thomson, 1910, S. 215–230, hier S. 226 und Eiffel, 1907.

5 Lilienthal, 1889, Kap. 24 sowie Tafel I und II.

6 von Lössl, 1896, Kap. 57.

wobei $\frac{\gamma}{g}$ die spezifische Masse des Mediums ist. Der Auftrieb oder das Gewicht ist

$$S = S_y = \frac{\gamma}{g} F v^2 \sin\alpha \cos\alpha$$

und der Fahrwiderstand

$$S_x = \frac{\gamma}{g} F v^2 \sin^2\alpha$$

Außerdem tritt noch ein nutzloser Widerstand $\frac{\gamma}{g} f v^2$auf, der von den nicht tragenden Flächen f herrührt.

Vom Antriebsmotor muss die Arbeit aufgewendet werden

$$A = \frac{\gamma}{g} F v^3 \sin^2\alpha + \frac{\gamma}{g} f v^3$$

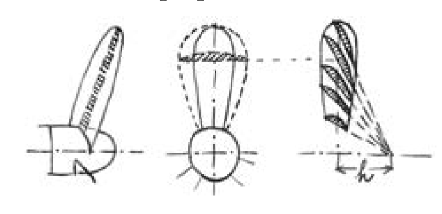
was für kleine α liefert:

$$A = \frac{S^2}{\frac{\gamma}{g} F v} + \frac{\gamma}{g} f v^3$$

Wäre also keine schädliche Fläche vorhanden, so würde im Betriebe umso *weniger* Energie nötig sein, je schneller der Flieger bei gegebenem Gewichte gleitet.

3.) Schraubenpropeller. Form und Konstruktion.

97

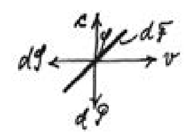


Die hintere, auf das Wasser drückende Seite der Schraubenflügel führt man meist als Schraubenfläche mit etwas geneigter Erzeugenden aus, die Steigung macht man meist über die ganze Schraube konstant. Die Form und besonders die Dichte der Flügel ergibt sich aus Festigkeitsrücksichten: Die Propellerwirkung ist am Umfange am größten, das das Material beanspruchende Biegungsmoment ist an der Nabe am größten.

Bei konstanter Steigung h kann man die Querschnitte des Flügels leicht in die Zeichnung eintragen und danach den Propeller „aufdrehen".

4.) Elementarschub und -arbeit.

Obgleich die Gesetze des Widerstandes von Platten und Körpern in Flüssigkeiten keine Elementargesetze sind, pflegt man doch die Wirkung eines Propellerelements für sich allein zu betrachten und hinterher über die Gesamtfläche zu integrieren. Nur das Newton'sche Widerstandsgesetz gibt einfache und übersichtliche Resultate und wird daher praktisch angewandt, das v. Lössl'sche führt bereits auf elliptische Integrale. Innerhalb kleiner Bereiche hat sich einige Übereinstimmung mit der Erfahrung ergeben.



Es sei v die Fortlaufgeschwindigkeit und c die Umfangsgeschwindigkeit des Propellerelements dF relativ zum Wasser. Dann ist der Normaldruck: 98

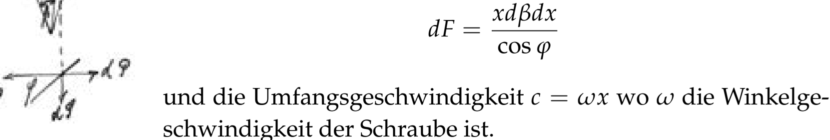
$$N = \frac{\gamma}{g} dF (c \sin \varphi - v \cos \varphi)^2$$

und daher der Elementarschub

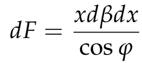
$$dS = \frac{\gamma}{g} dF (c \sin \varphi - v \cos \varphi)^2 \cos \varphi$$

und die elementare Umfangskraft

$$dP = \frac{\gamma}{g} dF (c \sin \varphi - v \cos \varphi)^2 \sin \varphi$$



Das Flächenelement der Schraube ist



$$dF = \frac{x d\beta dx}{\cos \varphi}$$

und die Umfangsgeschwindigkeit $c = \omega x$ wo ω die Winkelgeschwindigkeit der Schraube ist.

Die Steigung der Schraube ist

$$h = 2\pi x \tan \varphi = 2\pi R \tan \alpha$$

wo R der Außenradius und α der Neigungswinkel am Rande [ist].

Damit wird

$$dS = \frac{\gamma}{g} (\omega x \tan \alpha - v)^2 \cos^2 \varphi x d\beta dx$$

und weil

$$\omega R \tan \alpha = \omega x \tan \varphi = C = 2\pi n R \tan \alpha = nh$$

als die achsiale Schraubgeschwindigkeit oder der „Fortschritt“ konstant ist (wobei n die Tourenzahl pro sec bedeutet)

$$dS = \frac{\gamma}{g} (C - v)^2 x \cos^2 \varphi \, d\beta dx, \quad dP = dS \tan \varphi \, .$$

φ ist vom Radius abhängig, und zwar ist $x \tan \varphi = R \tan \alpha = const.$

Das liefert den Elementarschub

$$dS = \frac{\gamma}{g} (C - v)^2 d\beta \frac{x dx}{1 + (\frac{R \tan \alpha}{x})^2}$$

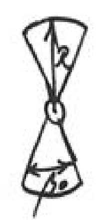
Die Elementarleistung ist

$$dE = \omega x dP = \omega x dS \tan\varphi = \omega R \tan\alpha dS = C dS\,.$$

Diese Beziehung gilt ganz allgemein.

99

5.) Integration über die Flügelfläche.



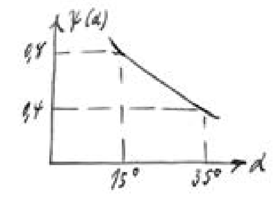
Für jeden Flügel hat man über β_0 und von 0 bis R zu integrieren, das gibt

$$S = \frac{\gamma}{g}(C - v)^2 \frac{\beta_0 R^2}{2}(1 + 2\tan^2\alpha \ln\sin\alpha)$$

oder wenn man die projizierte Flügelfläche $\frac{\beta_0 R^2}{2} = F$ nennt und die nebenstehende dargestellte Funktion des Randsteigungswinkels α abkürzt

$$\psi(\alpha) = 1 + 2\tan^2\alpha \ln\sin\alpha\,,$$

dann wird der gesamte Propellerschub



$$S = \frac{\gamma}{g} F (C - v)^2 \psi(\alpha).$$

Der Steigungswinkel wird gewöhnlich zu etwa 25° ausgeführt, bei dem man die günstigsten Resultate gefunden hat, er entspricht einem Steigungsverhältnis $\frac{h}{2R} = \pi\tan\alpha$ von etwa 1,5.

Die Leistung, die der Schraube zugeführt werden muss, ist dementsprechend

$$E = \frac{\gamma}{g} F (C - v)^2 C \psi(\alpha),$$

und bei einer Schiffsgeschwindigkeit U wird der Wirkungsgrad als Verhältnis der nutzbar verwerteten zur aufgewandten Leistung $\eta = \frac{SU}{E} = \frac{U}{C}$ ganz allgemein.

Obgleich $\psi(\alpha)$ für kleine α größer wird, ist es doch nicht zweckmäßig unter etwa 15° zu gehen, da sonst die Reibungsarbeit der Flügel im Wasser, die hier nicht berücksichtigt ist, den Wirkungsgrad zu gering werden lässt.

100

6.) Wahrer und scheinbarer Slip.



Für eine im ruhigen Wasser bewegte Schraube, wie z. B. bei Gleitfliegern, Luftschiffen, Gleitbooten, ist die Fortlaufgeschwindigkeit aller Schraubenelemente dieselbe und gleich der Schiffsgeschwindigkeit U.

Diese Schiffsgeschwindigkeit bleibt hinter dem Fortschritt C der Schraube, mit dessen Geschwindigkeit sie sich in einem festen Medium bewegen würde, zurück. Die Differenz $C - U$ heißt Slipgeschwindigkeit, das Verhältnis

$$s_s = \frac{C-U}{C}$$

heißt der Slip, und zwar ist dies der scheinbare Slip.

Die Schubkraft ist damit gegeben; wenn kein Slip vorhanden [ist], dann kann auch keine Schubkraft auftreten, da die Wasserteilchen dann keinen Druck erleiden.

Erfahrungsgemäß findet man:[7]

Wirkungsgrad η:	50% bis 75%	selten bis 90%
Slip für Schiffspropeller:	$s_s = 5\%$ bis 20%	selten bis 30%
Slip für Luftschrauben:	$s_s = 20\%$ bis 50%.	

Manchmal hat man negativen Slip beobachtet. Dass die Schrauben dabei doch arbeiten erklärt sich dadurch, dass sie sich nicht im ruhenden Wasser bewegen, sondern in dem mit dem Schiff strömenden Kielwasser, dessen Vorstromgeschwindigkeit V 10 bis 50% und mehr der Schiffsgeschwindigkeit beträgt und von der Völligkeit des Schiffes abhängt. 101

Mit $v = \frac{V}{U}$ erhält man daher den wahren Slip der Schraube:

$$s_w = \frac{C-(U-V)}{C} = s_s + v(1-s_s), \quad \text{denn} \quad v = C-(U+V)\,.$$

Die Schubkraft ist dann gegeben durch:

$$S = \frac{\gamma}{g}F\psi(\alpha)s_w^2C^2 = \frac{\gamma}{g}F\psi(\alpha)U^2\left(\frac{s_s}{1-s_s}+v\right)^2 = \frac{\gamma}{g}F\psi(\alpha)(1-v)\left(\frac{s_w}{1-s_w}\right)^2U^2\,.$$

Der Vorstrom vergrößert also die Schubkraft bei gegebenem scheinbaren Slip und gegebener Schiffsgeschwindigkeit.

Der scheinbare Wirkungsgrad ist $\eta_s = \frac{U}{C} = 1 - s_s$, er kann also größer als 1 werden. Das liegt daran, dass die Schraube Energie aus der kinetischen Energie des Wassers aufnimmt und in Schubkraft umsetzt. Der wahre Wirkungsgrad der Schraube ist nur $\eta_w = 1 - s_w = \eta_s(1-v)$ also stets < 1.

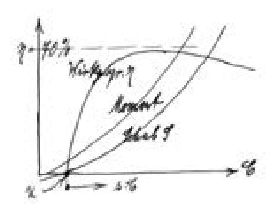
Ein großer Teil der günstigen Wirkung des Vorstromes wird durch das Tauchen des Propellers und die dadurch bedingte Druckverminderung am Heck des Schiffes aufgehoben, die einen vermehrten Schiffswiderstand bewirkt. Tatsächlich

[7] Vgl. dazu auch Dreihardt, 1906, 15–18 und Wagner, 1906; zu Luftschrauben siehe Finsterwalder, 1902, S. 177–179.

ist noch nie $\eta_s > 1$ beobachtet [worden], es ließe sich aber wohl erreichen, wenn man Leitschaufeln *vor* dem Propeller anbrächte und dadurch einerseits die nutzlose Rotation des Wassers hinter der Schraube aufhübe, andererseits den Unterdruck vor der Schraube für das Schiff unwirksam machte.

102

7.) Versuche von Froude.



R. E. Froude stellte messende Versuche an, indem er Schiff und Schraube sowohl allein als auch hintereinander durchs Wasser zog und die Schraube von außen antrieb.[8] Er erhielt die Form der hierstehenden Kurven für die gemessenen Größen, wenn die Schraube im ruhenden Wasser arbeitete. Wenn sie sich hinter dem Schiff befand, dann verschob sich einzig und allein die Kurve der Schubkraft um einen bestimmten Betrag der dem Vorstrom entsprach.

Durand setzte die Versuche von Froude fort und untersuchte besonders den Einfluss der Größe der Flügelfläche auf den Wirkungsgrad. Er fand diesen umso besser je kleiner das Verhältnis von Flügelfläche zur Fläche des ganzen Propellerkreises ist. Man erklärt dies dadurch, dass die Flügel stets frisches Wasser fassen müssen um gut zu wirken. Aus diesem Grunde findet man praktisch meist nur 2 oder 3, nie aber mehr als 4 Flügel ausgeführt, die im allgemeinen nur ziemlich schmal sind.

103



Für jedes Steigungsverhältnis $\frac{h}{2R}$ gibt es nach den Froude'schen Versuchen einen günstigsten Wirkungsgrad.[9] Das liegt daran, dass bei kleiner Steigung und auch bei zu kleinem Slip der Anteil der Reibung gegenüber der nützlichen Arbeit zu groß wird. Aus diesem Grunde ist auch in Wirklichkeit für $U = C : \eta = 0$, während es ohne Berücksichtigung der Reibung dann gerade möglichst groß wäre.

Die Schwierigkeit bei der Wahl des Propellers für ein gegebenes Schiff liegt darin, gerade die Größe und die Steigung zu treffen, bei der der Slip und die Propellerreibung zusammengenommen gerade das Minimum der Verluste bewirken.

Froude fand die nützliche Arbeit empirisch zu:

$$SU = (hn)^3(2R)^3(0{,}034 + 805s - 0{,}68s^2)\left(\frac{2R}{h} - 0{,}17\right)$$

wobei h, n, R in Einheiten von 10 Fuß und 10 Umdrehungen pro Minute zu nehmen sind.

---

[8] Froude, 1886; siehe dazu auch Durand, 1898, § 36.

[9] Siehe dazu Durand, 1898, Fig. 60.

8.) Berechnung des Slips.

Der Schiffswiderstand = Schubkraft S ist als bekannt anzusehen, desgleichen die Geschwindigkeit U und der relative Vorstrom v. Die Wirkungsweise der Schraube richtet sich dann nach ihrer Umdrehungszahl, Steigung und Größe, oder da 104 $nh = C$ ist und $\frac{U-C}{C} = s_s$, nach scheinbarem Slip und Größe allein. Wenn die Propellerfläche F (samt der Funktion $\psi(\alpha)$ die nicht stark schwankt) gegeben ist, kann man den Slip berechnen.

$S_p = \frac{\gamma}{g} F U^2$ ist der Widerstand, den der Propeller allein erfahren würde, wenn er mit der Schiffsgeschwindigkeit und *nicht* rotierend durchs Wasser geschleppt würde.

Führt man das in die Formel für die Schubkraft ein, dann erhält man

$$S = \psi(\alpha) S_p \left(\frac{s_s}{1 - s_s} + v \right)^2$$

und daraus folgt

$$s_s = \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{S}{\psi S_p}} - v}} .$$

Daraus ersieht man, dass der Propellerwiderstand im Verhältnis zum Schiffswiderstand nicht zu klein sein darf, weil man sonst zu großen Slip erhält. Man findet in der Praxis im Mittel $S_p = 2,5S$.

Wenn z. B. bei großen Schrauben $S_p > \frac{S}{\psi v^2}$, dann erhält man negativen scheinbaren Slip.

Da s_s und deshalb auch η vom Verhältnis $\frac{S_p}{S}$ abhängt, so hat es Sinn, beim Entwurf die Propellergröße nach der Hauptspantfläche des Schiffes zu bemessen. Man findet sie gleich 1/8 bis 1/15 derselben ausgeführt.

Bei Luftschrauben für Ballons und Flieger ist meist kein Vorstrom vorhanden 105 und daher

$$s = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{\psi S_p}{S}}} .$$

Auch hier hat man bei kleinen Schrauben großen Slip und umgekehrt, so dass es zweckmäßig scheint, ziemlich große Propeller anzuwenden. Zum Teil findet man das auch bei Luftschiffen und Aeroplanen.

9.) Beispiel: Dampfer „Mosel".

Schraubendurchmesser: $2R = 5,34$ m. Randsteigung $\alpha = 25°20'$. Flügelfläche $F = 7,14$ qm. 4 Flügel. Geschwindigkeit $U = 7,2$ m/sec. Vorstrom $v = \frac{V}{U} = 0,656$. Schub nach Modellversuchen berechnet: $S = 18\,290$ kg als notwendig zum Vortrieb.

Daraus berechnet sich $\sqrt{\frac{S}{\psi S_p}} = 0,892$; $s_s = 0,191$; $C = 8,9$ m/sec.
Tourenzahl pro Minute

$$n = \frac{60C}{2R\pi \tan \alpha} = 67,3\,.$$

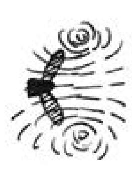
Gemessen wurden am laufenden Schiffe $n = 68$ Umdrehungen [pro Minute].

10.) Cavitation oder Hohlraumbildung.
Bei hoher Propellergeschwindigkeit, also besonders bei Dampfturbinenschiffen, tritt leicht die Erscheinung der Hohlraumbildung hinter den Flügeln auf, und zwar stets dann, wenn der Flächendruck des Wassers gegen die Flügel größer als etwa 1 atm. ist.

106 Diesem großen Druck an der arbeitenden Vorderfläche steht dann ein sehr kleiner an der Rückseite gegenüber, der das Wasser zum Verdampfen und Luftabscheiden bringt. Die der Rückseite des einen Flügels folgende Vorderseite des nächsten gelangt auch in den Bereich des Hohlraums und weil sie keinen genügenden Widerstand findet, so vermehrt sich die Umdrehungszahl der Schraube plötzlich rapide.

Zur Vermeidung der Hohlraumbildung muss man evtl. am fertigen Schiffe die Flügelfläche größer nehmen oder mehr Schrauben anwenden. Das erste englische Turbinenschiff, die „Turbinia" hatte im Ganzen 9 Schrauben.

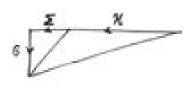
11.) Versuche von Ahlborn und Wagner



Ahlborn untersucht nur die Anlaufbewegung der Schraube im ruhigen Wasser, wobei die Schraube selbst sich nur dreht, nicht fortbewegt wird.[10] Er findet, dass sich hinter der Schraube ein Ringwirbel ausbildet, der im Raum ruht. Schlüsse über die Vorgänge bei Bewegung lassen sich hieraus nicht ziehen. Wagner untersucht die ruhende gedrehte Schraube im bewegten Wasser, leider nur bei einem bestimmten longitudinalen Slip, der den wirklichen Verhältnissen nicht 107 stets entspricht.[11] Er findet stets hinter der Schraube eine rotierende nach außen divergierende Strömung, deren Geschwindigkeit 10 bis 15% der longitudinalen ist. Aufgrund seiner Versuche konnten die Schrauben am „Kaiser Wilhelm II" derart verbessert werden, dass seine Geschwindigkeit von 20,0 auf 20,8 Knoten stieg.

[10] Ahlborn, 1905b.
[11] Wagner, 1906.

12.) Impulssätze.
Es wird ein vollkommen verlustloser Propeller angenommen.



Longitudinaler Schub $S = \frac{Q\Sigma}{g}$
Transversaler Schub $T = \frac{Q\sigma}{g}$
wenn Q die durch den Propeller fließende Wassermenge ist.
Arbeitsleistung

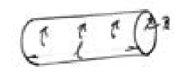
$$E = \frac{Q\Sigma}{g}\left(U + \frac{\Sigma}{2}\right) + \frac{Q\sigma}{g}\frac{\sigma}{2}$$

wird erhalten, indem man die kinetische Energie des Wassers an und hinter dem ruhend gedachten Propeller aufstellt.

Bei Rotation ist $\sigma = r\Omega$, Moment $M = Tv$, daher:

$$S = \frac{Q\Sigma}{g}; \quad M = \frac{Qr^2\Omega}{g}; \quad E = S\left(U + \frac{\Sigma}{2}\right) + \frac{M\Omega}{2}\,.$$

Um den Propellerschub insgesamt zu erhalten, muss man über die ganze Propellerfläche integrieren, es ist aber zu beachten, dass die rotierende Wassersäule hinter dem Propeller eine Saugwirkung auf diese ausübt, die den nützlichen Schub vermindert.



Die kinetische Energie der rotierenden Säule von der Länge l ist 108

$$L = \frac{\pi l R^4\Omega^2}{4g}$$

Der durch die Zentrifugalkraft bewirkte Druckgradient

$$\frac{dh}{dr} = \frac{r\Omega^2}{g}\,,$$

daher die Druckhöhe

$$h = \frac{r^2\Omega^2}{2g} + C\,,$$

und damit an der Oberfläche der Außendruck 0 herrscht, ist

$$h = \frac{(r^2 - R^2)\Omega^2}{2g}\,.$$

Die gesamte Saugwirkung ist

$$\Phi = \int_0^R 2\pi r h dr = \frac{\pi R^4\Omega^2}{4g} \quad \text{also} \quad \Phi l = L\,.$$

Wenn der Propeller so schnell bewegt wird, dass kein Slip herrscht, dann ist die um ihn aufgewandte Arbeit die auf Rotation des Wassers verwandte minus der durch den achsialen Druck Φ empfangenen, also

$$E = \frac{dL}{dt} - \Phi U = \frac{dL}{dt} - \Phi \frac{dl}{dt} = 0\,.$$

Die Energie der Rotation wird also durch den inneren Druckabfall geliefert.

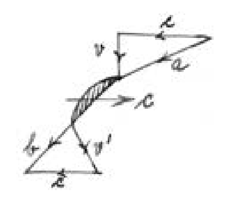
Bei der Integration über die Propellerfläche muss man also den der Wassermasse eingeprägten rotatorischen Impuls streichen und erhält als Schubkraft:

$$S = \frac{Q\Sigma}{g} - \Phi\,,$$

und als aufgewandte Arbeit:

$$E = Q\left[\frac{(U+\Sigma)^2 - U^2}{2g}\right] = (S+\Phi)(U + \frac{\Sigma}{2})\,.$$

109 Rankine und R. E. Froude hatten in ihren früheren Arbeiten diese Saugwirkung nicht beachtet und daher den rotatorischen Impuls mit in Rechnung gezogen. Der Unterschied beträgt bei nicht zu großen Slips und Steigungen nur einige Prozente. Greenhill berücksichtigt in seiner Theorie [12] allein den rotatorischen Impuls, was nicht richtig ist. Erst 1892 wies R. E. Froude auf diese Erscheinungen hin. [13] Es muss aber bemerkt werden, dass diese seine Rechnungen sehr anfechtbar sind, weil die Oberflächenbedingung des aus dem Propeller tretenden Wassers sicher nicht genau richtig ist. Das Wasser hat nach den Versuchen von Ahlborn und Wagner stark radiale Komponenten der Geschwindigkeit; auch ist nicht einzusehen, wie die Schraube es bewirken soll, dass der aus ihr austretende, früher ruhende, Wasserzylinder eine so merkwürdige Verteilung der inneren Energie – im Zentrum ein Manko, am Umfang einen Überfluss gegen Ruhe – aufweist.



13.) Variable Steigung der Flügel.

Um einen Arbeitsumsatz in der Schraube zu bewirken, muss das Wasser abgelenkt werden, aus seiner ursprünglichen absoluten Richtung v in die neue v', oder aus der relativen a in die neue b.

[12] Greenhill, 1888.

[13] Froude, 1892.



Um Stoßwirkungen zu vermeiden, formt man daher die Flügelquerschnitte oft so, dass eine allmähliche Umlenkung des Wassers stattfindet ([?] veränderliche Steigung). Auch radial veränderliche Steigung wird häufig angewandt, um dem Einfluss der Zentrifugalkraft und des ungünstigen Slips zu begegnen. 110

14.) Hubschrauben für Flugmaschinen.
Allgemein ist für jedes Flügelelement die Arbeit

$$dE = CdS$$

Die Hubkraft pro Arbeitseinheit ist daher

$$\frac{dS}{dE} = \frac{1}{C} = \frac{1}{nh}\,.$$

Daraus erkennt man, dass man bei einer gut wirkenden Hubschraube kleiner Steigung und Tourenzahl und daher bei gegebener Hubkraft großen Durchmesser wählen muss.

Bei $C = 1$ m/sec, d. h. die Geschwindigkeit der von der Schraube nach unten geworfenen Luft ist 1 m/sec, erhält man eine Hubkraft von 1 kg für 1 aufgewandtes m kg/sec oder von 75 kg pro Pferdestärke. Da es Motoren gibt, die nur wenig über 1 kg pro PS wiegen, so genügen diese vollauf zur Herstellung von derartigen Schraubenfliegern.

[R. Rüdenberg]

13 Über Schiffswiderstand in unbegrenztem Wasser

16. Sitzung am 4. März 1908

111

Allgemeine Literatur:

Pollard et Dudebout: Théorie du navire. Bd. III.[1]
Durand: Resistance and propulsion of ships.[2]
Johow: Hilfsbuch für den Schiffbau. (II. Aufl.)[3]

1. Einleitung. Aufgabe dieses Vortrags ist, diejenigen experimentellen Resultate zusammenzustellen und zu besprechen, welche bei der Ausarbeitung einer rationellen hydrodynamischen Theorie des Schiffswiderstands als Grundlagen nutzbar sein können und allerdings auch beachtet werden müssen.

Die Richtungen, in denen bisher dieses Problem verfolgt wurde, können folgendermaßen charakterisiert werden:

I. Rationelle Hydrodynamik.

II. Experimentelles Studium des Widerstands geometrischer Formen und ihrer Kombinationen (Ende des XVIII. Jahrhunderts. Führte trotz Namen wie Condorcet, d'Alembert, Bossut, Dubuat, Borda, Bézout etc. zu kein verwertbares Resultat).

112

III. Aufstellung von empirischen Formeln (Siehe Johow p. 633ff).

IV. Analyse der Teilerscheinungen (Seit 1870 W. Froude,[4] R. E. Froude,[5] Ahlborn[6]).

---

[1] Pollard u. Dudebout, 1892.
[2] Durand, 1898.
[3] Johow, 1902.
[4] Froude, 1872, 1874a,b, 1877.
[5] Froude, 1886, 1889, 1892.
[6] Ahlborn, 1904, 1905a,b.

Im Sinne der vorangestellten Aufgabe haben wir nur von der letzteren Richtung zu sprechen mit möglichst ständigem Zurückgreifen auf die I. Richtung, wobei fast alle bisher gehaltenen Seminarvorträge zur Geltung kommen.

Die Vielfachheit und große Komplikation der Teilerscheinungen, die beim Schiffswiderstand einen Anteil haben können, bedingt aber vor allem, die Aufgabe nach Möglichkeit zu vereinfachen. Das soll durch folgende Annahmen geschehen:

1. Unendlich tiefes und auch seitlich unbegrenztes Wasser.
2. Unbewegtes Wasser (ohne Strömung, ohne Wellen).
3. Stationärer Zustand.
4. Geschlepptes Schiff (ohne Schrauben, Räder, Ruder etc.).
5. Bewegung nur in Richtung der Kiellinie.

Einfluss der Propulsion auf den Widerstand wurde im vorangehenden Vortrag berührt, Modifikation durch endliche Tiefe und Kanalwandungen soll einem besonderen Vortrag vorbehalten sein.

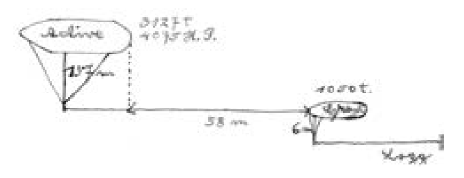
113 Weitere Vereinfachung würde sich noch durch die Betrachtung eines genügend tief fahrenden Unterseebootes ergeben, da hierbei die Oberflächenwellen wegfallen. So weit zu gehen ist aber wegen experimenteller Schwierigkeiten nicht zweckmäßig, so dass diesbezüglich auch keine Versuche im Großen vorliegen dürften.

Schon die 4. Vereinfachung allein verursacht beim Experimentieren mit wirklichen Schiffen ganz beträchtliche Schwierigkeiten, so dass sich eine größere Versuchsreihe, welche nicht bloß einen Zahlenwert oder eine eng begrenzte empirische Formel ergab, sondern für die Ausgestaltung der Theorie des Schiffswiderstandes von größter Fruchtbarkeit wurde, nur bei William Froude vorfindet. (On experiments with H. M. S. „Greyhound“. – Transactions of the Inst. of Nav. Arch. 1874.)[7]

2. Schleppversuche in Großem mit Greyhound.

Die Schwierigkeiten dieser Schleppversuche in Großem wurden eingehender besprochen. (Vgl. Pollard u. Dudebout. Bd. III. p. 463ff.) Hier sei nur durch eine Zeichnung angedeutet, wie Froude den Schleppzug einrichten musste, um die gegenseitige Beeinflussung zu vermeiden.

114



Als Hauptresultat ist anzuführen, dass sich bei Greyhound von 3 bis 8 Knoten eine Proportionalität mit dem Quadrat der Geschwindigkeit ergab, dann aber ein viel rascheres Anwachsen des Widerstandes, so dass, wenn der Wider-

[7] Froude, 1874a.

stand bis 8 Knoten [1 Knoten = 1 Seemeile in der Stunde = 0,5144 m/sec] durch folgende empirische *Formel*:

$$W = 4.784 \otimes v^2$$

(wo $\otimes$ den Hauptspant in m^2, v die Geschwindigkeit in m sec^{-1} bedeutet) dargestellt werden kann, bei der höchst erreichten Geschwindigkeit von 12 1/2 Knoten (wo man die weitere Steigerung wegen Steuerungsschwierigkeiten der Active aufgeben musste) der gemessenen Widerstand fast doppelt so groß war, als der Wert, den diese Formel ergeben würde. (10872 kg statt 6523 kg.)

Die Erklärung findet W. Froude darin, dass sich bis 8 Knoten die Wellenbildung um Greyhound kaum merklich machte, von da aber immer stärker zur Ausbildung kam, und so die stärkere Zunahme des Widerstandes wohl an ihren Anteil zu schreiben ist.

3. Zerlegung des Schiffswiderstandes.

Aus dieser Beobachtung ausgehend gibt Froude *folgende* Zerlegung des Schiffswiderstands in Teilerscheinungen:

Hautreibungswiderstand (skin-frictional resistance) 115
Wellenwiderstand (wave-making resistance)
Wirbelwiderstand (eddy-making resistance)

Als viertes Glied nimmt er noch den Widerstand in Betracht, den die aus dem Wasser in die Luft herausragenden Schiffsteile erleiden (Luftwiderstand), den wir aber mit ein paar gelegentlichen Bemerkungen verabfertigen können. (Bei Greyhound, ohne Mast und Takelung, in windfreier Luft war es bei 10 Knoten Geschwindigkeit nur 150 englische Pfund, d. h. 1.5 % des Gesamtwiderstands. Mit gewöhnlicher Takelung könnte es aufs Doppelte, d. h. auf 3 %, geschätzt werden. Bei Fahrt gegen Wind wächst es proportional mit dem Quadrat der Relativgeschwindigkeit.)

Diese Einteilung von Froude können wir im Wesentlichen beibehalten, es erweist sich aber als zweckmäßig, dem Vorgange der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften (von der bereits Abzüge vorliegen. Bd. IV. No. 22. Anhang 7a von C. H. Müller)[8] auf Vorschlag von Prof. Prandtl eine Änderung der Benennungen vorzunehmen, die durch folgende Bemerkungen begründet ist: Beim Wirbelwiderstand spielt die Reibung ebenfalls eine wesentliche Rolle, nur bei der Erklärung 116 des Wellenwiderstands kann man die Reibung in erster Annäherung vernachlässigen, andererseits aber ist der Reibungswiderstand auch nicht so gemeint, wie in der klassischen Hydrodynamik, wo [er] sich aus der Theorie der Laminarbewegung als mit der ersten Potenz der Geschwindigkeit proportional ergibt, sondern ist wesentlich auch durch Wirbeln bedingt, die sich eng an der Schiffshaut ausbilden. Es sei diesbezüglich des jüngeren Froude's Äußerung angeführt: (Aus den „Papers of the Greenock Philos. Soc. 1894 in deutscher Übersetzung zitiert bei Ahlborn Jahrbuch

[8] Kriloff u. Müller, 1907, S. 563ff..

der Schiffbautechnischen Gesellschaft VI. 1905. p. 71):[9] „Wir können den Effekt des Hautreibungswiderstands beobachten in der Hülle wirbelnden Wassers, welche die Oberfläche des Schiffes von einem bis zum anderen Ende einschließt und sternwärts dicker und dicker wird. Wir sehen die Wirkung des wirbelbildenden Widerstands in der Zunahmen der wirbelnden Wassermasse hinter dem Stern."

Deshalb ist es ratsam, beide der Wörter „Reibung" und „Wirbel" zu vermeiden
117 und folgende Benennungen zu akzeptieren:

Durch Reibung bedingt (I. und II.) — Auch ohne Reibung (III.)

I. Oberflächenwiderstand — II. Kielwasserwiderstand — III. Wellenwiderstand

Formwiderstand (II. und III.)

Hierbei kommt derjenige wesentliche Umstand zum Ausdruck, wo die Energie verbraucht resp. vom Schiff weggeführt wird: nämlich an der Oberfläche, im Kielwasser oder im Wellenzug der das Schiff begleitet.

Dazu ist noch auch die Reihenfolge umgestaltet worden, worüber wir bemerken können, dass I. und II. ganz nahe zueinander gehören; da beide durch Reibung bedingt sind und wegen dem stetigen Übergang der Wirbelmassen (vgl. die weiter unten folgenden Betrachtungen von Ahlborn) kaum eine scharfe Trennungslinie unter ihnen gezogen werden kann. Andererseits ist es aber möglich, und hat sich auch für praktische Zwecke nach W. Froude's Vorgang als zweckmäßig erwiesen, die beiden letzteren als „Formwiderstand" zusammenzufassen und so dem I., der ohne Rücksicht auf die Form ausgewertet werden kann, gegenüberzustellen.

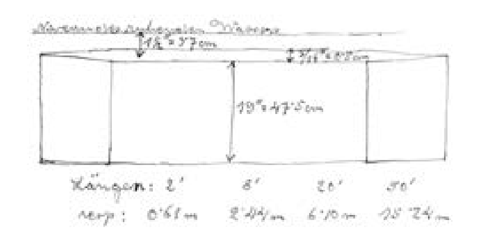
4. Oberflächenwiderstand.

Bei diesem, in der Literatur zumeist sogenannten „Reibungswiderstand" ist aber
118 nicht von einer inneren Reibung der Flüssigkeitsschichten, im Sinn der Laminartheorie,[10] die Rede, sondern es handelt sich um einen Fall der turbulenten Bewegung. Aus diesem Grunde ist hier zu theoretischen Untersuchungen nichts mitzuteilen, sondern man ist gänzlich auf die grundlegenden Messungen von W. Froude angewiesen (Brit. Assn. Rep. 1872 und 1874).[11] Er schleppte dünne, an den Enden zugeschärfte und mit einer Metall-Scheide versehene Holzplatten von 4 verschiedenen Längen, die mit verschiedenen Stoffen (Lack, Paraffin, Zinnfolie, Rohleinwand, Sand) bezogen waren, in der Richtung ihrer Länge, mit verschiedenen Geschwindigkeiten, vertikal eingetaucht durch's Wasser und maß den Widerstand mittels eines Dynamometers.

[9] Ahlborn, 1905a. Siehe dazu auch Kriloff u. Müller, 1907, S. 581–583.

[10] Gemeint ist die Grenzschichttheorie, Prandtl, 1905a.

[11] Froude, 1872, 1874b.



Die Dimensionen sind an der nebenstehenden Figur angegeben. Die Resultate gibt er für jede Länge graphisch an und fasst sie für praktische Zwecke in folgender empirischer Formel – von stark kritisierbarer Bauart – zusammen: 119

$$W = kFv^m$$

wo F den Flächeninhalt, v die Geschwindigkeit bedeutet und k und m zwei Konstanten sind, die aber außer der Beschaffenheit der Oberfläche noch von der Länge abhängen, so dass man

$$k = \varphi(L) \quad \text{und} \quad m = \psi(L)$$

zu schreiben hat.

Wir wollen die Tabellen für k und m hier nicht wiedergeben (sie sind auch in jedem der vorne zitierten Handbücher zu finden, nur ist die Umrechnung auf Meter-Maße nicht in der Ordnung), sondern wir wollen folgende Bemerkungen aufzeichnen:

1.) $m = \psi(L)$ ist nahezu 2, ist also mit Länge und Beschaffenheit der Fläche nicht wesentlich veränderlich. Wird mit größeren Längen etwas kleiner (bis 1.83), praktisch kann man ihn aber als konstant (für glatte Flächen im Mittelwerte 1.85, für entschieden raue: 2) annehmen.

2.) $k = \varphi(L)$ nimmt auch ab mit wachsender Länge, aber schon viel beträchtlicher. Und zwar anfangs stärker, später ganz schwach (von 2′ auf 8′ ist die Gesamtabnahme etwa 20 %, von 20′ auf 50′ nur etwa 8 %). Für größere Längen als 15 m (über welche Froude wegen experimentelle Schwierigkeiten nicht gehen konnte) erscheint es ziemlich gerechtfertigt, k als konstant anzunehmen. – Erwähnt wurden noch die weiteren Experimente von Tideman.[12] 120

Reinlichkeits-Zustand der Oberfläche hat sehr großen Einfluss auf diesen Teil des Widerstandes.

5. Kielwasserwiderstand.

Über die Wirkung des Kielwassers kann man sich am besten Vorstellung verschaffen, wenn man mit Ahlborn (Jahrb. der Schiffbautechn. Ges. 1905)[13] von dem senkrecht durch's Wasser geschleppten Brett ausgeht und die Gestaltung des Schleppwassers durch geeignete Übergangsformen bis zu Schiffsform verfolgt.

---

12 Tideman, 1880; siehe dazu auch Johow, 1902, S. 684–685 und Pollard u. Dudebout, 1892, S. 374.

13 Ahlborn, 1905a.

Dies wirft auch neues Licht auf das, was wir vorher über das Verhältnis des Oberflächenwiderstands und Kielwasserwiderstands sagten. Bei scharf gebauten Schiffen ist das Kielwasser verhältnismäßig gering (wird auch durch die Schraube beeinflusst), bei volleren Schiffsformen ist es stärker entwickelt. Nach W. Froude's Angabe macht der Kielwasserwiderstand bei wohlgebauten Schiffen etwa 8–10 % des Oberflächenwiderstands aus. Messungen über die Strömungsverteilung im Kielwasser bei einem wirklichen Schiff liegen bei Calvert vor (Inst. Nav. Arch. Transactions 1893).[14]

121

6. Allgemeines über Wellenwiderstand.

Die Ausbildung und Form der Schiffswellen wurden in einem vorangehenden Vortrag besprochen,[15] daher beschränken sich die allgemeinen Bemerkungen auf folgendes:

1.) Beim stationären Zustand kommt nur jener Teil der Energie in Betracht, welcher nötig ist, das schon einmal ausgebildete Wellensystem in Bezug auf das Schiff konstant zu erhalten, also auf je eine Wellenlänge die Hälfte der in einer Welle erhaltenen Energie.

2.) Bei kleinen Geschwindigkeiten geringe Wellenbildung, geringer Wellenwiderstand. Dann rasches Anwachsen. Beispiel von Greyhound nach Froude's Theorie.

3.) Das Anwachsen des Wellenwiderstandes mit der Geschwindigkeit zeigt aber gewisse Unregelmäßigkeiten, indem es abwechselnd rascher und wieder langsamer erfolgt, was sich durch verschiedenes Interferieren der Bug und Heckwellen erklären lässt.

122

4.) Ähnliche Interferenzerscheinungen lassen sich durch Veränderung der Länge des Schiffsmittelstückes erzielen.

Darin kommt die Abhängigkeit von der Form prägnant zum Ausdruck. Das haben wir mit Ahlborn auch vom Kielwasser festgestellt. Bei diesen „Formwiderständen" greift nun die Modelltheorie ein.

7. Froude's Modellregel.

Der Modelltheorie liegt Newton's Prinzip der dynamischen Ähnlichkeit zu Grunde. (Vgl. auch Helmholtz Berliner Monatsberichte 1873 – Gute Darstellung bei Föppl Technische Mechanik Bd. III).[16] Die Regel lautet: Wenn wir wollen, dass sich der Vorgang beim Modell dynamisch ähnlich gestalten soll dem Vorgang bei der Schiffsbewegung, so müssen wir, wenn sich das Modell zum Schiff linear wie $1 : \alpha$ verhält, die Geschwindigkeit des Modells so wählen, dass sie sich zur Schiffs-

[14] Calvert, 1893.

[15] Siehe Protokoll11.

[16] Helmholtz, 1873; Föppl, 1897.

geschwindigkeit verhält wie $1 : \sqrt{\alpha}$, und die mechanische Ähnlichkeit kann nur dann zutreffen, wenn sich sämtliche Widerstandskräfte verhalten wie $1 : \alpha^3$.

Dies ist zunächst als Postulat zu betrachten, wobei die Realisierung der ersten Bedingung nur von uns abhängt, während das Zutreffen der zweiten Bedingung noch fraglich ist, weil die Reibung bisher unberücksichtigt blieb.[17] 123

Tatsächlich fügt sich der Oberflächenwiderstand (siehe die empirische Formel) der dynamischen Ähnlichkeit nicht. Man kann auf zweierlei Weise Abhilfe tun und die Modellregel retten. W. Froude schlug beide Wege ein. Man verfährt entweder so, dass man die Oberflächenwiderstände für Schiff und Modell besonders berechnet und vom Gesamtwiderstand abzieht und nur die so erhaltenen Restwiderstände (Formwiderstand) vergleicht, welche sich dem Gesetz der mechanischen Ähnlichkeit praktisch gut fügen. (Festgesetzt durch Vergleich von Greyhound mit 1/16 Modell), oder man sucht die Beschaffenheit der Oberfläche des Modells so zu wählen, dass sich eine Ähnlichkeit ergibt. Das gelang dem Froude bei Greyhound in äußerst befriedigendem Maße dadurch, dass er 2/3 der Modelloberfläche lakiert, 1/3 mit Rohleinwand überzogen hat. ($R_{\text{Schiff}} = kFv^m$ und $R_{\text{Modell}} = k'F'v'^{m'}$ werden dem Ähnlichkeitspostulat $R_{\text{Modell}} : R_{\text{Schiff}} = 1 : \alpha^3$ angepasst, wenn $m' = m$ und $k' : k = 1 : \alpha^{\frac{m}{2}-1}$ erzielt wird.) (Vgl. Pollard et Dudebout Bd. III. p. 488.)

In der Praxis wird ersteres Verfahren zur Bestimmung des Formwiderstandes von Schiffsprojekten (und zum Vergleich für eventuelle Formänderungen) angewandt, und gestaltet sich im Prinzip folgendermaßen: w_m, der Gesamtwiderstand des Modells, wird gemessen, w_r und W_r, die Reibungswiderstände von Modell und Schiff, werden jedes durch eine besondere Formel berechnet. Dann gibt 124

$$w_m - w_r = w_f$$

den Formwiderstand für's Modell, und

$$W_f = \alpha^3 w_f$$

das Entsprechende fürs Schiff. Und man hat dann daraus den Schiffswiderstand:

$$W_s = W_r + W_f\,.$$

[17] Zum Beispiel versagt die Ähnlichkeit bei dem von Helmholtz angestellten Vergleich eines lenkbaren Ballons mit einem Ozeandampfer, Finsterwalder, 1902, S. 154.

Dieses Verfahren wurde durch R. E. Froude später (Trans. I. N. A. 1888 u. 1892) [18] durch die „Methode der Konstanten“ praktisch weiter ausgestaltet (Vgl. Schütte Jahrb. der Schiffbautechn. Ges. Bd. II. 1901 [19] – und Brockhoff, unter Pseudonym: C. E. A. B., Schiffbau Bd. VI. p. 67. [20])

8. Modellversuchsanstalten.

Nach den großen praktischen Erfolgen der Froude’schen Methode folgten seiner 125 ersten Modellschleppstation in Chelston Cross (bei Torquay) bald mehrere in England und in fast allen Marinestaaten. In Deutschland gibt es deren drei, und zwar in Übigau bei Dresden, in Bremerhaven und Charlottenburg. (Beschreibung der „Versuchsanstalt Übigau“ siehe in Schiffbau. Bd. VIII. von Gebers). [21] Hier seien nur die hauptsächlichen Abmessungen [der Bassins, die Länge der Modelle betrug 4–6 m] im Allgemeinen und für einige der wichtigsten gegeben:

Bassin	Allgemein	Froude	Washington	Übigau
Länge	100–150 m	84 m	112 m	88+7 m
Breite	5–15 m	11 m	13,1 m	6,5 m
Tiefe	3–5 m	3–4,5 m	4,46 m	3,6 m

Das Referat über die praktischen und theoretischen Ergebnisse der Modell-Schleppversuche blieb noch auf den künftigen Semester.

[A. Visnya]

[18] Froude, 1888, 1892.

[19] Schütte, 1901, S. 356ff.

[20] Brockhoff, 1904.

[21] Gebers, 1906.

Literaturverzeichnis

[Abercromby 1888] ABERCROMBY, Ralph: Observations on the height, length, and velocity of ocean waves. In: *Philosophical Magazine* 25 (1888), S. 263–269

[Ahlborn 1904] AHLBORN, Friedrich: Hydrodynamische Experimentaluntersuchungen. In: *Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft* 5 (1904), S. 417–453

[Ahlborn 1905a] AHLBORN, Friedrich: Die Wirbelbildung im Widerstandsmechanismus des Wassers. In: *Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft* 6 (1905), S. 67–81

[Ahlborn 1905b] AHLBORN, Friedrich: Die Wirkung der Schiffsschraube auf das Wasser. In: *Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft* 6 (1905), S. 82–106

[Anderson 1998] ANDERSON, John D. J.: *A History of Aerodynamics*. Cambridge : Cambridge University Press, 1998

[Archibald 2014] ARCHIBALD, Thomas: Physics as a Constraint on Mathematical Research: The Case of Potential Theory and Electrodynamics. In: *Institutions and Applications. Proceedings of the Symposium on the History of Modern Mathematics, Vassar College, Poughkeepsie, New York, June 20–24, 1989, edited by David E. Rowe and John McCleary. Academic Press* (2014), S. 28–75

[Assmann 1915] ASSMANN, Richard: *Das Königlich Preußische Aeronautische Observatorium Lindenberg*. Braunschweig : Vieweg, 1915

[Bacharach 1883] BACHARACH, Max: *Abriss der Geschichte der Potentialtheorie*. Göttingen : Vandenhoeck und Ruprecht, 1883

[Bazin 2005] BAZIN, Gabriel: *Henry Bazin, 1829–1917, Hydraulicien, inspecteur général des ponts et chaussées, membre de l'institut : l'homme, l'ingénieur, le savant*. Dijon : Cléa, 2005

[Bazin 1865] BAZIN, Henry: Recherches hydrauliques sur l'écoulement de l'eau dans les canaux découverts et sur la propagation des ondes. In: *Mémoirs présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France* 19 (1865), S. 495–652

[Bazin 1896] BAZIN, Henry: Expériences nouvelles sur la distribution des vitesses dans les tuyaux. In: *Recueil des Mémoires des Savants Etrangers* 32 (1896)

[Betz 1919] BETZ, Albert: Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust. Mit einem Zusatz von L. Prandtl. In: *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen* (1919), S. 193–217

[Betz 1921] BETZ, Albert: Die Vorgänge beim Schraubenpropeller. In: *Naturwissenschaften* 9 (1921), Nr. 18, S. 309–313

[Blasius 1907] BLASIUS, Heinrich: *Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung*, Universität Göttingen, Diss., 1907

[Bloor 2011] BLOOR, David: *The Enigma of the Aerofoil*. Chicago : Chicago University Press, 2011

[Bodenschatz u. Eckert 2011] BODENSCHATZ, Eberhard ; ECKERT, Michael: Prandtl and the Göttingen school. In: *Peter A. Davidson, Yukio Kaneda, Keith Moffatt, Katepalli R. Sreenivasan, eds., A Voyage Through Turbulence. Cambridge University Press* (2011), 40–100. http://arxiv.org/abs/1107.4729

[Bodenschatz u. Eckert 2013] BODENSCHATZ, Eberhard ; ECKERT, Michael: Ein Leben für die Turbulenz. In: *Spektrum der Wissenschaft* (2013), 44–52. http://www.spektrum.de/artikel/1205323

[Boussinesq 1877] BOUSSINESQ, Joseph: *Essai sur la théorie des eaux courantes. Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Science de l'Institut de France*. 1877

[Boussinesq 1897] BOUSSINESQ, Joseph: *Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes a grande section*. Paris : Gauthier-Villars, 1897

[Brillouin 1907] BRILLOUIN, Marcel: *Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz*. Paris : Gauthier-Villars, 1907

[Brockhoff 1904] BROCKHOFF: Beitrag zur Theorie der Konstanten Froude's zur Bestimmung des Schiffswiderstandes. In: *Schiffbau. Zeitschrift für die gesamte Industrie auf schiffbautechnischen und verwandten Gebieten* 6 (1904), S. 67–69. – Pseudonym: C. A. E. B.

[Buchwald 1985] BUCHWALD, Jed Z.: *From Maxwell to Microphysics: Aspects of Electromagnetic Theory in the Last Quarter of the Nineteenth Century*. Chicago : University of Chicago Press, 1985

[Burkhardt u. Meyer 1900] BURKHARDT, Heinrich ; MEYER, Franz: Potentialtheorie (Theorie der Laplace-Poissonschen Differentialgleichung). In: *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* II A 7b (1900), S. 464–503

[Calvert 1893] CALVERT, George A.: On the measurement of wake currents. In: *Transactions of the Royal Institution of Naval Architects* 34 (1893), S. 61–77

[Cotterill 1879] COTTERILL, James H.: The minimum area of blade in a screw propeller necessary to form a complete column. In: *Transactions of the Royal Institution of Naval Architects* (1879), S. 152

[Couette 1890] COUETTE, Maurice: Etudes sur le frottement des liquides. In: *Annales de Chimie et Physique* 21 (1890), S. 433–510

[Craik 2004] CRAIK, Alex: The Origins of Water Wave Theory. In: *Annual Reviews of Fluid Mechanics* 36 (2004), S. 1–28

[Craik 2005] CRAIK, Alex: George Gabriel Stokes on Water Wave Theory. In: *Annual Reviews of Fluid Mechanics* 37 (2005), S. 23–42

[Darrigol 1998] DARRIGOL, Olivier: From Organ Pipes to Atmospheric Motions: Helmholtz on Fluid Mechanics. In: *Historical Studies in the Physical and Biological Sciences* 29 (1998), Nr. 1, S. 1–51

[Darrigol 2002] DARRIGOL, Olivier: Turbulence in 19th-century hydrodynamics. In: *Historical Studies in the Physical and Biological Sciences* 32 (2002), Nr. 2, S. 207–262

[Darrigol 2005] DARRIGOL, Olivier: *Worlds of flow*. Oxford : Oxford University Press, 2005

[Darrigol 2017] DARRIGOL, Olivier: Joseph Boussinesq's legacy in fluid mechanics. In: *Comptes Rendus Mecanique* 345 (2017), S. 427–445

[Donnelly 1991] DONNELLY, Russell J.: Taylor-Couette Flow: The Early Days. In: *Physics Today* (1991), Nr. November, S. 32–39

[Dreihardt 1906] DREIHARDT, Conrad: *Der Schraubenpropeller (Schiffsschraube). Konstrukton und Berechnung desselben*. Berlin : M. Krayn, 1906

[Durand 1898] DURAND, William F.: *The Resistance and Propulsion of Ships*. New York : John Wiley & Sons, 1898

[Eckert 2006] ECKERT, Michael: *The dawn of fluid dynamics*. Weinheim : Wiley-VCH, 2006

[Eckert 2010] ECKERT, Michael: The troublesome birth of hydrodynamic stability theory: Sommerfeld and the turbulence problem. In: *European Physical Journal, History* 35:1 (2010), S. 29–51

[Eckert 2017a] ECKERT, Michael: A Kind of Boundary-Layer ‚Flutter': The Turbulent History of a Fluid Mechanical Instability. In: *arXiv:1706.00334 [physics.flu-dyn]* (2017). https://arxiv.org/abs/1706.00334

[Eckert 2017b] ECKERT, Michael: *Ludwig Prandtl – Strömungsforscher und Wissenschaftsmanager*. Berlin, Heidelberg : Springer, 2017

[Eiffel 1907] EIFFEL, Gustave: *Recherches expérimentales sur la résistance de l'air exécutées à la tour Eiffel*. Paris : L. Maretheux, 1907

[Ekman 1907] EKMAN, Vagn W.: On the waves produced by a given distribution of pressure, which travels over the surface of water. In: *Arkiv för matematik, astronomi och fysik* 3 (1907), Nr. 11

[Epple 1998] EPPLE, Moritz: Topology, Matter, and Space, I: Topological Notions in 19th-century Natural Philosophy. In: *Archive for History of Exact Sciences* 52 (1998), Nr. 4, S. 297–392

[Fano 1907] FANO, Gino: Kontinuierliche geometrische Gruppen. Die Gruppentheorie als geometrisches Einteilungsprinzip. In: *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* 3 A B (1907), Nr. 4b, S. 289–388

[Finsterwalder 1902] FINSTERWALDER, Sebastian: Aerodynamik. In: *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* 4 (1902), Nr. 17, S. 149–184

[Forchheimer 1905] FORCHHEIMER, Philipp: Hydraulik. In: *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* IV (1905), Nr. 20, S. 324–472

[Föppl 1897] FÖPPL, August ; TEUBNER (Hrsg.): *Vorlesungen über technische Mechanik. Band 3: Festigkeitslehre*. 1897

[Froude 1881] FROUDE, R. E.: On the Leading Phenomena of the Wave-making Resistance of Ships. In: *Transactions of the Royal Institution of Naval Architects* 22 (1881), S. 220

[Froude 1886] FROUDE, R. E.: The determination of the most suitable dimensions of screw-propeller. In: *Transactions of the Royal Institution of Naval Architects* 27 (1886), S. 250

[Froude 1888] FROUDE, R. E.: On the ‚constant' system of notation of results of experiments on models used at the Admiralty Experiment Works. In: *Transactions of the Royal Institution of Naval Architects* 29 (1888), S. 304–318

[Froude 1889] FROUDE, R. E.: On the part played in propulsion by differences of fluid pressure. In: *Transactions of the Royal Institution of Naval Architects* 30 (1889), S. 390–405

[Froude 1892] FROUDE, R. E.: On the theoretical effect of the race rotation on screw propeller efficiency. In: *Transactions of the Royal Institution of Naval Architects* 33 (1892), S. 265

[Froude 1894] FROUDE, R. E.: On Ship Resistance. In: *Papers of the Greenock Philosophical Society* (1894)

[Froude 1872] FROUDE, William: *Experiments on the surface-friction experienced by a plane moving through water*. Brighton, 1872. – 42nd Report of the British Association for the Advancement of Science

[Froude 1874a] FROUDE, William: On experiments with HMS Greyhound. In: *Transactions of the Royal Institution of Naval Architects* 15 (1874), S. 36–73

[Froude 1874b] FROUDE, William: *Report to the Lords Commissioners of the Admiralty on experiments for the determination of the frictional resistance of water on a surface, under various conditions, performed at Chelston Cross, under the Authority of their Lordships*. Belfast, 1874. – 44th Report by the British Association for the Advancement of Science

[Froude 1877] FROUDE, William: Experiments upon the effect produced on the wave-making resistance of ships by length of parallel middle body. In: *Transactions of the Royal Institution of Naval Architects* 18 (1877), S. 77–97

[Gebers 1906] GEBERS, Friedrich: Die Versuchsanstalt Uebigau. In: *Schiffbau. Zeitschrift für die gesamte Industrie auf schiffbautechnischen und verwandten Gebieten* 8 (1906), S. 1–9, 45–50

[Gierens 1935] GIERENS, Michael: P. Adolf Steichen, gestorben am 16. Juni 1935 in Valkenburg. In: *Mitteilungen aus den deutschen Provinzen* 14 (1935), Nr. 104, S. 79–82

[Goldstein 1966] GOLDSTEIN, Sydney: Theodore von Kármán. 1881–1963. In: *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society* 12 (1966), S. 334–365

[Gorn 1992] GORN, Michael H.: *The Universal Man: Theodore Von Karman's Life in Aeronautics*. Smithsonian Institution, 1992

[Greenhill 1888] GREENHILL, Alfred G.: A theory of the screw-propeller. In: *Transactions of the Royal Institution of Naval Architects* 29 (1888), S. 319

[Hager 2003] HAGER, W. H.: Blasius: A life in research and education. In: *Experiments in Fluids* 34 (2003), S. 566–571

[Hager 2009] HAGER, Willi H.: *Hydraulicians in Europe 1800–2000. A biographical dictionary of leaders in hydraulic engineering and fluid mechanics. Vol. 2*. Madrid : International Association of Hydraulic Engineering and Research, 2009

[Hahn u. a. 1904] HAHN, Hans ; HERGLOTZ, Gustav ; SCHWARZSCHILD, Karl: Über das Strömen des Wassers in Röhren und Kanälen. In: *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 51 (1904), S. 411–426

[Hanle 1982] HANLE, Paul A.: *Bringing Aerodynamics to America*. Cambridge, Massachusetts : MIT Press, 1982

[Hele-Shaw 1898a] HELE-SHAW, Henry S.: Experiments on the flow of water. In: *Liverpool Engineering Society* (1898), S. 109–124

[Hele-Shaw 1898b] HELE-SHAW, Henry S.: Investigation of the nature of surface resistance of water and of stream line motion under certain experimental conditions. In: *Transactions of the Royal Institution of Naval Architects* 40 (1898), S. 21–46

[Helmholtz 1858] HELMHOLTZ, Hermann v.: Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. In: *Journal für reine und angewandte Mathematik* 55 (1858), S. 25–55

[Helmholtz 1868] HELMHOLTZ, Hermann v.: Über diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen. In: *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, mathematisch-physikalische Klasse* (1868), S. 215–228

[Helmholtz 1873] HELMHOLTZ, Hermann v.: Über ein Theorem, geometrisch ähnliche Bewegungen betreffend, nebst Anwendung auf das Problem, Luftballons zu lenken. In: *Monatsberichte der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin* (1873), S. 501–504

[Hiemenz 1907] HIEMENZ, Karl: *Katalog des mathematischen Lesezimmers der Universität Göttingen*. Leipzig : Teubner, 1907

[Hiemenz 1911] HIEMENZ, Karl: *Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszylinder*, Universität Göttingen, Diss., 1911

[Jackson 1995] JACKSON, J. D.: Osborne Reynolds: Scientist, Engineer and Pioneer. In: *Proceedings of the Royal Society of London* A 451 (1995), S. 49–86

[Jaeger 1909] JAEGER, Manfred: *Graphische Integrationen in der Hydrodynamik*, Universität Göttingen, Diss., 1909

[Johow 1902] JOHOW, Hans: *Hans Johows Hilfsbuch für den Schiffbau*. 2. Springer, 1902

[von Kármán u. Edson 1968] KÁRMÁN, Theodore von ; EDSON, Lee: *Die Wirbelstrasse; mein Leben für die Luftfahrt*. Hamburg : Hoffmann und Campe, 1968

[Kirchhoff 1869] KIRCHHOFF, Gustav: Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen. In: *Journal für reine und angewandte Mathematik* (1869), S. 289–298

[Klein 1907] KLEIN, Felix: Vorrede zum vierten Bande. In: *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* IV (1907), S. V–VIII

[Klein 1910] KLEIN, Felix: Über die Bildung von Wirbeln in reibungslosen Flüssigkeiten. In: *Zeitschrift für Mathematik und Physik* (1910), S. 259–262

[Klein 1925] KLEIN, Felix: *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt. Band 2: Geometrie*. Berlin : Springer, 1925. – Dritte Auflage. Original von 1908

[Kragh 2002] KRAGH, Helge: The Vortex Atom: A Victorian Theory of Everything. In: *Centaurus* 44 (2002), S. 32–114

[Kriloff u. Müller 1907] KRILOFF, A. ; MÜLLER, C. H.: Die Theorie des Schiffes. Mit einem Anhang: Hydrodynamik des Schiffes. In: *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* IV (1907), Nr. 22, S. 517–593

[von Kármán 1911] KÁRMÁN, Theodore von: Über den Mechanismus des Widerstandes, den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erfährt. In: *Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physikalische Klasse* (1911), S. 509–517

[von Kármán 1912] KÁRMÁN, Theodore von: Über den Mechanismus des Widerstandes, den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erfährt. In: *Nachrichten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physikalische Klasse* (1912), S. 547–556

[Lamb 1895] LAMB, Horace: *Hydrodynamics*. Cambridge : Cambridge University Press, 1895

[Lamb 1906] LAMB, Horace: *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, 1906. – 3. Auflage

[Lamb 1907] LAMB, Horace: *Lehrbuch der Hydrodynamik*. Leipzig : Teubner, 1907

[Langley 1891] LANGLEY, Samuel P.: Experiments in Aerodynamics. In: *Smithsonian Contributions to Knowledge* 27 (1891)

[Lilienthal 1889] LILIENTHAL, Otto: *Der Vogelflug als Grundlage der Fliegekunst: ein Beitrag zur Systematik der Flugtechnik*. Berlin : R. Gaertners Verlagsbuchhandlung, 1889

[Lorentz 1897] LORENTZ, Hendrik A.: Over den weerstand dien een vloeistofstroom in eene cilindrische buis ondervindt. In: *Versl. K. Akad. Wet. Amsterdam* 6 (1897), S. 28–49

[Lorentz 1907] LORENTZ, Hendrik A.: Über die Entstehung turbulenter Flüssigkeitsbewegungen und über den Einfluss dieser Bewegungen bei der Strömung durch Röhren. In: *Hendrik Antoon Lorentz: Abhandlungen über theoretische Physik. Leipzig: Teubner* 1 (1907), S. 43–71

[Love 1901a] LOVE, A. E. H.: Hydrodynamik. II. Theoretische Ausführungen. In: *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* IV (1901), Nr. 16, S. 84–147

[Love 1901b] LOVE, Augustus E. H.: Hydrodynamik. I. Physikalische Grundlegung. In: *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* IV (1901), Nr. 15, S. 48–83

[von Lössl 1896] LÖSSL, Friedrich von: *Die Luftwiderstands-Gesetze, der Fall durch die Luft und der Vogelflug: mathematisch-mechanische Klärung auf experimenteller Grundlage*. Wien : Hölder, 1896

[Magin 1908] MAGIN, Ernst: *Optische Untersuchung über den Ausfluß von Luft durch eine Lavaldüse*, Universität Göttingen, Diss., 1908

[Mallock 1896] MALLOCK, Arnulph: Experiments on Fluid Viscosity. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 187 (1896), S. 41–56

[Manegold 1970] MANEGOLD, Karl-Heinz: *Universität, Technische Hochschule und Industrie. Ein Beitrag zur Emanzipation der Technik im 19. Jahrhundert unter besonderer Berücksichtigung der Bestrebungen Felix Kleins*. Berlin : Duncker und Humblot, 1970

[Maurer 1998] MAURER, Bertram: *Karl Culmann und die graphische Statik*. Berlin, Diepholz, Stuttgart : GNT-Verlag, 1998

[Maxwell 1878] MAXWELL, James C.: Atom. In: *Encyclopaedia Britannica* III (1878). – Ninth Edition

[Mehrtens 1990] MEHRTENS, Herbert: *Moderne, Sprache, Mathematik. Eine Geschichte des Streits um die Grundlagen der Disziplin und des Subjekts formaler Systeme*. Frankfurt a. M. : Suhrkamp, 1990

[Meyer 1908] MEYER, Theodor: *Über zweidimensionale Bewegungsvorgänge in einem Gas, das mit Überschallgeschwindigkeit strömt*, Universität Göttingen, Diss., 1908

[Michell 1898] MICHELL, J. H.: The Wave–Resistance of a Ship. In: *Philosophical Magazine* 45 (1898), S. 106–123

[Michell 1893] MICHELL, John H.: The highest waves in water. In: *Philosophical Magazine* 36 (1893), S. 430–437

[Mikhailov 1994] MIKHAILOV, Gleb K.: Hydrodynamics and hydraulics. In: *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences, Volume 2. Routledge: London and New York* (1994), S. 1006–1022

[Mulligan 2001] MULLIGAN, Joseph F.: Emil Wiechert (1861–1928): Esteemed seismologist, forgotten physicist. In: *American Journal of Physics* 69 (2001), Nr. 3

[Nickelsen u. a. 2004] NICKELSEN, Kärin ; HOOL, Allesandra ; GRASHOFF, Gerd: *Theodore von Kármán. Flugzeuge für die Welt und eine Stiftung für Bern*. Basel : Birkhäuser, 2004

[Poiseuille 1840] POISEUILLE, J. L. M.: Recherches experimentales sur Ie mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres. In: *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences* (1840). – 1840 (11) 961–967, 1041–1048; 1841 (12), 112–115; 1946 in: Memoires presentes par divers savants a l'Academie Royale des Sciences de l'Institut de France, IX: 433–544.

[Pollard u. Dudebout 1892] POLLARD, J. ; DUDEBOUT, A.: *Théorie du Navire*. Bd. III. Paris : Gauthier-Villars, 1892

[Prandtl 1903] PRANDTL, Ludwig: Zur Torsion von prismatischen Stäben. In: *Physikalische Zeitschrift* 4 (1903), S. 758–759

[Prandtl 1904] PRANDTL, Ludwig: Späne- und Staubabsaugung. In: *Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure* 48:13 (1904), S. 458–459

[Prandtl 1905a] PRANDTL, Ludwig: Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. In: *Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses, Heidelberg 1904. Leipzig: Teubner* (1905), 484–491. http://www.mathunion.org/ICM

[Prandtl 1905b] PRANDTL, Ludwig: Strömende Bewegung der Gase und Dämpfe. In: *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* V:5b (1905), S. 287–319

[Prandtl 1914] PRANDTL, Ludwig: Georg Fuhrmann (Berlin). In: *Physikalische Zeitschrift* 15 (1914), S. 902–904

[Rankine 1865] RANKINE, W. J. M.: On the Mechanical Principles of the Action of Propellers. In: *Transactions of the Royal Institution of Naval Architects* 6 (1865), S. 13–35

[Rayleigh 1887] RAYLEIGH, Lord: On the Stability or Instability of Certain Fluid Motions, II. In: *Proceedings of the London Mathematical Society* 19 (1887), S. 67–74

[Rayleigh 1891] RAYLEIGH, Lord: Experiments in Aerodynamics. In: *Nature* 45 (1891), S. 108–109

[Reich 1996] REICH, Karin: Die Rolle Arnold Sommerfelds bei der Diskussion um die Vektorrechnung, dargestellt anhand der Quellen im Nachlaß des Mathematikers Rudolf Mehmke. In: *History of mathematics: states of the art. Flores quadrivii - studies in honor of Christoph J. Scriba, edited by J. Dauben, M. Folkerts, E. Knobloch, H.Wussing. San Diego; Boston u.a.* (1996), S. 319–341

[Reusch 1860] REUSCH, Friedrich E.: *Abhandlung über gewisse Strömungsgebilde im innern von Flüssigkeiten und deren morphologische Bedeutung*. Tübingen : gedruckt bei Heinrich Laupp, 1860

[Reynolds 1883] REYNOLDS, Osborne: An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 174 (1883), S. 935–982

[Riecke 1887a] RIECKE, Eduard: Ueber die scheinbare Wechselwirkung von Ringen, welche in einer incompressiblen Flüssigkeit in Ruhe sich befinden. In: *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen* (1887), S. 505–515

[Riecke 1887b] RIECKE, Eduard: Ueber einige Beziehungen zwischen hydrodynamischen und electrischen Erscheinungen. In: *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen* (1887), S. 10–28

[Riecke 1888] RIECKE, Eduard: Beiträge zur Hydrodynamik. In: *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen* (1888), S. 347–357

[Riehn 1882] RIEHN, Wilhelm: *Die Berechnung des Schiffswiderstandes*. Hannover : Hahnsche Buchhandlung, 1882

[Rott 1990] ROTT, N.: Note on the History of the Reynolds Number. In: *Annual Reviews of Fluid Mechanics* 22 (1990), S. 1–11

[Rotta 1985] ROTTA, Julius C.: Die Berufung von Ludwig Prandtl nach Göttingen. In: *Luft- und Raumfahrt* 2-85 (1985), S. 53–56

[Rotta 1990a] ROTTA, Julius C.: *Die Aerodynamische Versuchsanstalt in Göttingen, ein Werk Ludwig Prandtls. Ihre Geschichte von den Anfängen bis 1925*. Göttingen : Vandenhoeck und Ruprecht, 1990

[Rotta 1990b] ROTTA, Julius C.: Dokumente zur Geschichte der Aerodynamischen Versuchsanstalt in Göttingen 1907–1925. In: *DLR-Mitteilungen* 90-05 (1990)

[Rouse u. Ince 1957] ROUSE, Hunter ; INCE, Simon: *History of hydraulics*. Iowa Institute of Hydraulic Research, State University of Iowa, 1957

[Rowe 1989] ROWE, David E.: Klein, Hilbert, and the Göttingen Mathematical Tradition. In: *Osiris, 2nd Series* 5 (1989), S. 186–213

[Runge u. Prandtl 1906] RUNGE, Carl ; PRANDTL, Ludwig: Das Institut für angewandte Mathematik und Mechanik. In: *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 54 (1906), S. 263–280

[Runge 1949] RUNGE, Iris: *Carl Runge und sein wissenschaftliches Werk*. Göttingen : Vandenhoeck & Ruprecht, 1949

[Saffman 1992] SAFFMAN, P. G.: *Vortex Dynamics*. Cambridge : Cambridge University Press, 1992

[Schmitt 2007] SCHMITT, François G.: About Boussinesq's turbulent viscosity hypothesis: historical remarks and a direct evaluation of its validity. In: *Comptes Rendus Mécanique* 335 (2007), Nr. 9–10, S. 617–627

[Schoen 2005] SCHOEN, Lothar: Rüdenberg, Reinhold. In: *Neue Deutsche Biographie* 22 (2005), 210–212. https://www.deutsche-biographie.de/gnd117696234.html

[Schröder 1913] SCHRÖDER, Hans: *Die Zentralfläche eines hyperbolischen Paraboloides*, Universität Halle-Wittenberg, Diss., 1913

[Schütte 1901] SCHÜTTE, Johann: Untersuchungen über Hinterschiffsformen. In: *Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft* 2 (1901), S. 331–370

[Settles u. a. 2009] SETTLES, Gary S. ; KRAUSE, Egon ; FÜTTERER, Heinz: Theodor Meyer - Lost pioneer of gas dynamics. In: *Progress in Aerospace Sciences* 45 (2009), S. 203–210

[Siegel 1965] SIEGEL, Carl L.: Zur Geschichte des Frankfurter Mathematischen Seminars. In: *Carl Ludwig Siegel, Gesammelte Abhandlungen, herausgegeben von K. Chandrasekharan & Hans Maass, 4 Bände, Springer-Verlag 1966, 1979, hier Band 3, S. 462–474* (1965). – Vortrag am 13. Juni 1964 im Mathematischen Seminar anläßlich der 50-Jahr-Feier der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt

[Siegel 1991] SIEGEL, Daniel M.: *Innovation in Maxwell's Electromagnetic Theory. Molecular Vortices, Displacement Current, and Light*. Cambridge : Cambridge University Press, 1991

[Siegmund-Schultze 2009] SIEGMUND-SCHULTZE, Reinhard: *Mathematicians Fleeing from Nazi Germany. Individual Fates and Global Impact*. Princeton : Princeton University Press, 2009

[Smith u. Wise 1989] SMITH, Crosbie ; WISE, M. N.: *Energy and Empire. A Biographical Study of Lord Kelvin*. Cambridge : Cambridge University Press, 1989

[Sommerfeld 1900] SOMMERFELD, Arnold: Neuere Untersuchungen zur Hydraulik. In: *Verhandlungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte* 72 (1900), S. 56

[Sommerfeld 1909] SOMMERFELD, Arnold: Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklärung der turbulenten Flüssigkeitsbewegung. In: *Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici (Roma, 6–11 Aprile 1908)* 3 (1909), 116–124. www.mathunion.org/ICM

[Sonar 2009] SONAR, Thomas: Turbulenzen um die Fluidmechanik. In: *Spektrum der Wissenschaft* (2009), Nr. April, S. 78–87

[Steichen 1909] STEICHEN, Adolf: *Beiträge zur Theorie der zweidimensionalen Bewegungsvorgänge in einem Gase, das mit Überschallgeschwindigkeit strömt*, Universität Göttingen, Diss., 1909

[Stokes 1847] STOKES, George G.: On the theory of oscillatory waves. In: *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 8 (1847)

[Stokes 1880] STOKES, George G.: *Mathematical and Physical Papers by George Gabriel Stokes*. Bd. 1. Cambridge University Press, 1880

[Stokes 1883] STOKES, George G.: On the highest wave of uniform propagation. In: *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 4 (1883), S. 361–365

[Stokes 1905] STOKES, George G.: *Mathematical and Physical Papers by George Gabriel Stokes*. Bd. 5. Cambridge University Press, 1905

[Sutera u. Skalak 1993] SUTERA, Salvatore P. ; SKALAK, Richard: The History of Poiseuille's Law. In: *Annual Review of Fluid Mechanics* 25 (1993), S. 1–19

[Thomson 1891] THOMSON, William: *Popular lectures and addresses, Volume III*. London : Macmillan and Co., 1891

[Thomson 1910] THOMSON, William: *Mathematical and Physical Papers. Volume IV: Hydrodynamics and General Dynamics*. Cambridge University Press, 1910

[Tideman 1880] TIDEMAN, B. J.: Uitkomsten van proeven op den Wederstand van Scheeps-modellen. In: *Memoriaal van de Marine, 2e Afdeeling* (1880)

[Tobies 1994] TOBIES, Renate: Mathematik als Bestandteil der Kultur – Zur Geschichte des Unternehmens „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen". In: *Mitteilungen der Österreichischen Gesellschaft für Wissenschaftsgeschichte* 14 (1994), S. 1–90

[Tobies 2014] TOBIES, Renate: Das Seminar Elektrotechnik innerhalb der Lehre von angewandter Mathematik an der Universität Göttingen, 1905. In: *Mathematik und Anwendungen (Forum 14), hrsg. von Michael Fothe, Michael Schmitz, Birgit Skorsetz und R. Tobies. Bad Berka: Thillm* (2014), S. 42–49

[Tollmien 1931] TOLLMIEN, Walter: Turbulente Strömungen. In: *Handbuch der Experimentalphysik, Band 4: Hydro- und Aerodynamik, 1. Teil: Strömungslehre und allgemeine Versuchstechnik.* (1931), S. 291–339

[Tuck 1989] TUCK, E. O.: The Wave Resistance Formula of J. H. Michell (1898) and its Significance to Recent Research in Ship Hydrodynamics. In: *Kournal of the Australian Mathematical Society* B 30 (1989), S. 365–377

[Vig 2003] VIG, Károly: *Zoological Research in Western Hungary: A History*. Szombathely : Savaria Museum, 2003

[Vig 2014] VIG, Károly: Visnya Aladár. In: *Fizikusok és matematikusok az Eötvös Collegiumban 1895–1950, Írta és összeállította: Radnai Gyula. ELTE, Eötvös József Collegium* (2014), S. 56–59

[Voigt 1885] VOIGT, Woldemar: Zur Theorie der Flüssigkeitsstrahlen. In: *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen* (1885), S. 285–302

[Voigt 1891a] VOIGT, Woldemar: Beiträge zur Hydrodynamik I. In: *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen* (1891), S. 37–64

[Voigt 1891b] VOIGT, Woldemar: Beiträge zur Hydrodynamik II. In: *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen* (1891), S. 65–84

[Voigt 1892] VOIGT, Woldemar: Bewegung eines Flüssigkeitstromes über einem gewellten Grunde. In: *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen* (1892), S. 490–493

[Wagner 1906] WAGNER, Rudolf: Versuche mit Schiffsschrauben und deren praktische Ergebnisse. In: *Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft* 7 (1906), S. 264–366

[Wien 1900] WIEN, Wilhelm: *Lehrbuch der Hydrodynamik*. Leipzig : Hirzel, 1900

[Wilson 1905] WILSON, Edwin B.: The Heidelberg congress: sectional meetings. In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 11 (1905), S. 247–263

Register